หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖

คณิตศาสตร์

เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑



หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ ๑ พ.ศ. ๒๕๖๓

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้โรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๑ นี้ มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องลำดับและอนุกรม และแคลคูลัสเบื้องต้น ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พาณิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหา เชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ทั้งหลาย รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑**
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ภาคเรียนที่ ๑ **เวลา ๑๐๐ ชั่วโมง** **จำนวน ๒.๕ หน่วยกิต**

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

ลำดับและอนุกรม ลำดับ ลิมิตของลำดับอนันต์ อนุกรม สัญลักษณ์แสดงการบวก การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม

แคลคูลัสเบื้องต้น ลิมิตของฟังก์ชัน ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง อนุพันธ์อันดับสูง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ปริพันธ์จำกัดเขต พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะและกระบวนการที่ได้ ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจารณญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

๒. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต

๓. หาผลบวกอนุกรมอนันต์

๔. เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้

๕. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้

๖. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา

๗. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา

รวมทั้งหมด ๗ ผลการเรียนรู้

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 2 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“ .... ”

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

จุดมุ่งหมาย

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

เสริมสมอง

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)

กิจกรรม

เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์สมาร์ตโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม

โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติมนอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1 ....
....

2. ....
....

3. ....
....

บทที่ 1 จะใช้สี

บทที่ 2 จะใช้สี

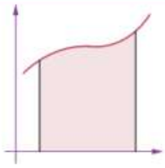
สารบัญ

บทที่ 1

สารบัญ บทที่ 2

บทที่	เนื้อหา	หน้า

2



แคลคูลัสเบื้องต้น

บทที่ 1 | ลำดับและอนุกรม

จุดมุ่งหมาย

1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต
2. หาลิมิตของลำดับอนันต์โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต
3. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก
4. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
5. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์
6. ระบุได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก
7. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา

บทที่ 1

ลำดับและอนุกรม

“

ในการพิจารณาปริมาณยาที่ให้กับผู้ป่วยเพื่อให้ยาออกฤทธิ์ได้อย่างต่อเนื่องและไม่ตกค้างในร่างกายมากเกินไปจนเป็นอันตราย สามารถใช้อนุกรมเรขาคณิตมาช่วยในการคำนวณได้ ตัวอย่างเช่น ผู้ป่วยที่ติดเชื้อแบคทีเรียต้องรับประทานยาปฏิชีวนะครั้งละ 1 เม็ด ขนาด 250 มิลลิกรัม วันละ 4 ครั้ง (ทุก 6 ชั่วโมง) และเมื่อเวลาผ่านไปทุก 6 ชั่วโมง ปริมาณยาในร่างกายจะลดลงเหลือร้อยละ 4 จะได้ว่า หลังจากรับประทานยาเม็ดที่ 2 จะมีปริมาณยาอยู่ในร่างกาย $250+250(0.04)=260$ มิลลิกรัม หลังจากรับประทานยาเม็ดที่ 3 จะมีปริมาณยาอยู่ในร่างกาย $250+250(0.04)+250(0.04)^2=260.4$ มิลลิกรัม และสามารถคำนวณได้ว่าหลังจากรับประทานยาเม็ดที่ 10 จะมีปริมาณยาอยู่ในร่างกาย $250+250(0.04)+250(0.04)^2+\cdots+250(0.04)^9$ มิลลิกรัม ซึ่งผลบวกที่ได้อยู่ในรูปอนุกรมเรขาคณิต มีค่าประมาณ 260.42 มิลลิกรัม จะเห็นว่าถ้าผู้ป่วยรับประทานยาติดต่อกันตามที่แพทย์สั่ง ผู้ป่วยจะมีปริมาณยาในร่างกายค่อนข้างคงที่ตลอดระยะเวลาการรักษา ซึ่งจะทำให้การรักษาเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ แต่ถ้าผู้ป่วยหยุดการรับประทานยาก่อนกำหนด อาจทำให้ปริมาณยาที่จะออกฤทธิ์ไม่เพียงพอต่อการรักษา และทำให้เชื้อแบคทีเรียสามารถปรับตัวให้ทนต่อฤทธิ์ของยาชนิดนั้นได้ กลายเป็นเชื้อแบคทีเรียที่ดื้อยา ซึ่งถ้าเกิดการติดเชื้อครั้งต่อไปก็จะไม่สามารถใช้ยาชนิดนั้นรักษาได้อีก



”

ความรู้ก่อนหน้า

- เลขยกกำลัง
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ipst.me/10550

1.1 ลำดับ

1.1.1 ความหมายของลำดับ

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

1) สุนีย์เก็บเงินทุกเดือนเดือนละ 500 บาท เป็นเวลา 8 เดือน เขียนตารางแสดงจำนวนเงินสะสมในแต่ละเดือนได้ดังนี้

เดือนที่	1	2	3	4	5	6	7	8
จำนวนเงินสะสม (บาท)	500	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	3,500	4,000

จากตาราง จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ระหว่างเดือนที่เก็บเงินกับจำนวนเงินสะสมในแต่ละเดือนเป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000\}$

2) จำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้นด้วยการแบ่งเซลล์จากหนึ่งเป็นสอง โดยเริ่มต้นมีแบคทีเรียหนึ่งเซลล์และแบ่งเซลล์ทุกวินาที เขียนตารางแสดงจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไปในแต่ละวินาทีได้ดังนี้

เวลาที่ผ่านไป (วินาที)	1	2	3	4	5	6	...
จำนวนแบคทีเรีย (เซลล์)	2	4	8	16	32	64	...

จากตาราง จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปกับจำนวนแบคทีเรียในแต่ละวินาทีเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots\}$

ความสัมพันธ์ในข้อ 1) และ 2) เป็นความสัมพันธ์ที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเต็มบวก และความสัมพันธ์ทั้งสองต่างก็เป็นฟังก์ชัน เรียกความสัมพันธ์เช่นนี้ว่า ลำดับ โดยให้นิยามของลำดับดังนี้

บทนิยาม 1

ลำดับ (sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ในการเขียนแสดงลำดับ จะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน กล่าวคือ ถ้า a เป็นลำดับ ซึ่ง $a(1) = a_1, a(2) = a_2, a(3) = a_3, \dots, a(n) = a_n$ แล้ว

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ
เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ
เรียก a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ
$\vdots$
และเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับ หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ

เรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ว่า **ลำดับจำกัด (finite sequence)** และเรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกว่า **ลำดับอนันต์ (infinite sequence)**

กรณี a เป็นลำดับจำกัด เขียนแสดงลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
กรณี a เป็นลำดับอนันต์ เขียนแสดงลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ตัวอย่างของลำดับ

1) $7, 14, 21, 28, 35, 42$ เป็นลำดับจำกัด
2) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 99$ เป็นลำดับจำกัด
3) $6, 11, 16, 21, 26, \ldots, 5n+1, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์
4) $4, 9, 16, 25, 36, \ldots, (n+1)^2, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์

การศึกษาเรื่องลำดับต่อไปนี้จะกล่าวถึงเฉพาะลำดับซึ่งเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริงเท่านั้น และเรียกว่า ลำดับของจำนวนจริง

การเขียนแสดงลำดับ

สามารถเขียนแสดงลำดับได้หลายรูปแบบ ดังต่อไปนี้

การเขียนแสดงลำดับโดยเขียนแจกแจงพจน์ของลำดับ

ถ้าลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับจำกัดและมีจำนวนพจน์ไม่มากนัก วิธีการกำหนดหรือเขียนแสดงลำดับจะใช้วิธีการเขียนพจน์ทั้งหมดของลำดับ ตัวอย่างเช่น

หยอดเงินลงในกระปุกออมสินวันละ 5 บาท จำนวนเงินในกระปุก 7 วันแรกสามารถเขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$

ในกรณีที่ลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับจำกัดแต่มีจำนวนพจน์มาก อาจเขียนเพียงพจน์แรก ๆ และใช้เครื่องหมาย $\ldots$ เพื่อละพจน์กลาง ๆ ไว้ แล้วเขียนพจน์สุดท้ายกำกับ ตัวอย่างเช่น

จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ $1, 2, 3, \ldots, 100$

ในกรณีที่ลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับอนันต์ จะเขียนเพียงพจน์แรก ๆ และใช้เครื่องหมาย $\ldots$ เพื่อละพจน์ต่อ ๆ ไป โดยต้องเป็นที่เข้าใจตรงกันว่าพจน์ที่ละไว้หมายถึงอะไร ตัวอย่างเช่น

จำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้นด้วยการแบ่งเซลล์จากหนึ่งเป็นสอง โดยเริ่มต้นมีแบคทีเรียหนึ่งเซลล์และแบ่งเซลล์ทุกวินาที เขียนจำนวนแบคทีเรียในวินาทีที่ $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ เป็นลำดับได้ดังนี้ $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

การเขียนแสดงลำดับโดยเขียนพจน์ทั่วไปของลำดับ

วิธีการนี้จะเขียนลำดับในรูปสูตรของพจน์ทั่วไปของลำดับ ตัวอย่างเช่น

หยอดเงินลงในกระปุกออมสินวันละ 5 บาท เป็นเวลา 7 วัน จำนวนเงินในกระปุกในวันที่ n เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ $a_n = 5n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ $a_n = n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

จำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้นด้วยการแบ่งเซลล์จากหนึ่งเป็นสอง โดยเริ่มต้นมีแบคทีเรียหนึ่งเซลล์และแบ่งเซลล์ทุกวินาที เขียนจำนวนแบคทีเรียในวินาทีที่ n เป็นลำดับได้ดังนี้ $a_n = 2^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จากตัวอย่างทั้งหมดข้างต้น จะเห็นว่าการกำหนดพจน์ทั่วไปของลำดับจะทำให้ทราบทุกพจน์ในลำดับนั้น

ตัวอย่างที่ 1

จงหาสี่พจน์แรกของลำดับที่ $a_n = 3n - 2$

วิธีทำ แทน n ใน $a_n = 3n - 2$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = 3(1) - 2 = 1$$
$$a_2 = 3(2) - 2 = 4$$
$$a_3 = 3(3) - 2 = 7$$
$$a_4 = 3(4) - 2 = 10$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ 1, 4, 7 และ 10 ■

ตัวอย่างที่ 2

จงหาหกพจน์แรกของลำดับที่ $a_n = n + (-1)^n n$

วิธีทำ แทน n ใน $a_n = n + (-1)^n n$ ด้วย 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 จะได้หกพจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = 1 + (-1)^1(1) = 0$$
$$a_2 = 2 + (-1)^2(2) = 4$$
$$a_3 = 3 + (-1)^3(3) = 0$$
$$a_4 = 4 + (-1)^4(4) = 8$$
$$a_5 = 5 + (-1)^5(5) = 0$$
$$a_6 = 6 + (-1)^6(6) = 12$$

ดังนั้น หกพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 0, 4, 0, 8, 0 และ 12 ■

ข้อสังเกต สามารถกำหนดลำดับในตัวอย่างที่ 2 ในอีกรูปแบบได้ดังนี้

$$a_n = \begin{cases} 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 0 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

การเขียนแสดงลำดับโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

เมื่อกำหนดพจน์เริ่มต้นจำนวนหนึ่งพร้อมกับสูตรการหาพจน์ถัดไปจากพจน์ก่อนหน้า จะเรียกการกำหนดลำดับด้วยวิธีนี้ว่า การนิยามโดยใช้ **ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation)**

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดลำดับ a_n ซึ่ง $a_1 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + 3$ เมื่อ $n \geq 2$ จงหาห้าพจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ แทน n ใน $a_n = a_{n-1} + 3$ ด้วย 2, 3, 4 และ 5 จะได้

$$a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$
$$a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$$
$$a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$$
$$a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$$

ดังนั้น ห้าพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 2, 5, 8, 11 และ 14 ■

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดลำดับ b_n ซึ่ง $b_1 = 1$ และ $b_n = nb_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$ จงหาหกพจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ แทน n ใน $b_n = nb_{n-1}$ ด้วย 2, 3, 4, 5 และ 6 จะได้

$$b_2 = 2b_1 = 2(1) = 2$$
$$b_3 = 3b_2 = 3(2) = 6$$
$$b_4 = 4b_3 = 4(6) = 24$$
$$b_5 = 5b_4 = 5(24) = 120$$
$$b_6 = 6b_5 = 6(120) = 720$$

ดังนั้น หกพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 1, 2, 6, 24, 120 และ 720 ■

ข้อสังเกต สามารถกำหนดพจน์ทั่วไปของลำดับในตัวอย่างที่ 4 ได้เป็น $b_n = n!$

เสริมสมอง : ลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส

ลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci sequence) คือ ลำดับ F_n ซึ่ง $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ และ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$ เรียกแต่ละพจน์ของลำดับฟีโบนักชีว่า จำนวนฟีโบนักชี (Fibonacci number) ซึ่งได้แก่ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... ส่วนลำดับลูคัส (sequence of Lucas numbers) คือ ลำดับ L_n ซึ่ง $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ และ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$ เรียกแต่ละพจน์ของลำดับลูคัสว่า จำนวนลูคัส (Lucas number) ซึ่งได้แก่ 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... จะเห็นว่าลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัสเป็นลำดับที่กำหนดโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดเดียวกัน กล่าวคือ แต่ละพจน์ของลำดับได้จากผลบวกของสองพจน์ก่อนหน้า แต่การกำหนดสองพจน์แรกของลำดับทั้งสองต่างกัน ทำให้ลำดับทั้งสองแตกต่างกัน

การเขียนแสดงลำดับโดยการบอกเงื่อนไขของลำดับหรือสมบัติของพจน์ของลำดับ

ถ้าไม่ทราบสูตรของพจน์ทั่วไปของลำดับและไม่ทราบความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับแล้ว การกำหนดลำดับจำเป็นต้องใช้วิธีการบอกเงื่อนไขของลำดับหรือสมบัติของพจน์ของลำดับ ตัวอย่างเช่น

1) a_n เป็นจำนวนเฉพาะตัวที่ n คือลำดับ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, …
2) b_n เป็นทศนิยมตำแหน่งที่ n ของ π คือลำดับ 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, …

แบบฝึกหัด 1.1.1

1. จงหาสี่พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

1) $a_n = 2n+5$
2) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
3) $a_n = (-2)^n$
4) $a_n = \frac{n+1}{n}$
5) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$
6) $a_n = \frac{2^n}{3^n}$
7) $a_n = (n-1)(n+1)$
8) $a_n = n(n-1)(n-2)$

2. จงหาห้าพจน์แรกของลำดับ a_n ที่กำหนดโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดต่อไปนี้
   1) $a_1 = 0$ และ $a_n = a_{n-1} + n - 1$ เมื่อ $n \geq 2$
   2) $a_1 = 1{,}000$ และ $a_n = 1 + (0.05)a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$
   3) $a_1 = 2$ และ $a_n = 6a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$
   4) $a_1 = 1, a_2 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$
   5) $a_1 = 2, a_2 = 0$ และ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$

3. จงหาเจ็ดพจน์แรกของลำดับของจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 และ 7 ลงตัว โดยเรียงจากน้อยไปมาก

1.1.2 ลำดับเลขคณิต

พิจารณาลำดับ $4, 6, 8, 10, 12$ จะเห็นว่าแต่ละพจน์ได้จากการบวกพจน์ก่อนหน้าที่อยู่ติดกันด้วย 2 หรือพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 2 เสมอ นั่นคือ $6-4 = 8-6 = 10-8 = 12-10 = 2$ เรียกลำดับที่มีสมบัติเช่นนี้ว่า ลำดับเลขคณิต

บทนิยาม 2

ลำดับเลขคณิต (arithmetic sequence) คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n+1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า **ผลต่างร่วม (common difference)**

จากบทนิยาม ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ จะเป็นลำดับเลขคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว d ที่ $a_{n+1} - a_n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่างของลำดับเลขคณิต

1) $5, 10, 15, 20, 25, \ldots, 5n, \ldots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มี 5 เป็นผลต่างร่วม
2) $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มี 0 เป็นผลต่างร่วม
3) $5, 3, 1, -1, -3, \ldots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มี -2 เป็นผลต่างร่วม

นอกจากนี้ยังสามารถกำหนดลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ได้ดังนี้
จาก $a_{n+1} - a_n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $a_{n+1} = a_n + d$
ให้ a_1 และ d เป็นค่าคงตัว จะได้

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$ เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรก และ d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 5

จงเขียนสี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิต $-1, 6, 13, \ldots$

วิธีทำ จากลำดับเลขคณิต $-1, 6, 13, \ldots$ ถ้าให้ d เป็นผลต่างร่วม

จะได้ $d = 6 - (-1) = 7$ และเนื่องจาก $a_3 = 13$

จะได้

$$
\begin{aligned}
a_4 &= a_3 + d = 13 + 7 = 20 \\
a_5 &= a_4 + d = 20 + 7 = 27 \\
a_6 &= a_5 + d = 27 + 7 = 34 \\
a_7 &= a_6 + d = 34 + 7 = 41
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 20, 27, 34 และ 41 ■

ตัวอย่างที่ 6

ถ้าลำดับเลขคณิตมี $a_1 = 22$ และ $a_2 = 35$ จงหาพจน์ที่ 100 ของลำดับนี้

วิธีทำ เนื่องจาก $a_1 = 22$ และ $a_2 = 35$ ดังนั้น ผลต่างร่วม คือ $d = 35 - 22 = 13$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้ $a_{100} = 22 + (100-1)(13) = 1,309$

นั่นคือ พจน์ที่ 100 ของลำดับนี้ คือ 1,309 ■

ตัวอย่างที่ 7

จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต $6, 2, -2, -6, \ldots$

วิธีทำ จากลำดับเลขคณิต $6, 2, -2, -6, \ldots$ จะได้ $a_1 = 6$ และ $d = 2 - 6 = -4$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้
$$\begin{aligned} a_n &= 6 + (n-1)(-4) \\ &= 6 - 4n + 4 \\ &= 10 - 4n \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $10 - 4n$ ■

ตัวอย่างที่ 8

ถ้าลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 5 คือ 3 และพจน์ที่ 10 คือ 13 จงหาพจน์ที่ 100

วิธีทำ จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $3 = a_1 + (5-1)d$ ---------- (1)

และ $13 = a_1 + (10-1)d$ ---------- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 2$ และ $a_1 = -5$

ดังนั้น $a_{100} = -5 + (100-1)(2) = 193$

นั่นคือ พจน์ที่ 100 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 193 ■

ตัวอย่างที่ 9

ถ้า 6 และ 10 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์อีกหนึ่งพจน์อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ จงหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้

วิธีทำ ให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 และ 10 จะได้ $6, a, 10$ เป็นลำดับเลขคณิต

นั่นคือ

$$\begin{aligned} a-6 &= 10-a \\ 2a &= 16 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 และ 10 คือ 8 ■

ตัวอย่างที่ 10

จงหาว่าจำนวนนับที่มากกว่า 7 แต่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 7 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว คือ 12
เนื่องจาก 1,610 หารด้วย 6 ได้ผลหารเป็น 268 และได้เศษเป็น 2 ดังนั้น จำนวนนับที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว คือ $1,610-2$ หรือ 1,608
จะได้ว่าลำดับของจำนวนนับที่มากกว่า 7 แต่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 12 ผลต่างร่วมเป็น 6 และพจน์ที่ n เป็น 1,608

จาก

$$a_n = a_1+(n-1)d$$

จะได้

$$\begin{aligned} 1,608 &= 12+(n-1)(6) \\ 1,608 &= 12+6n-6 \\ 6n &= 1,602 \\ n &= 267 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนนับที่มากกว่า 7 แต่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว มีทั้งหมด 267 จำนวน ■

ตัวอย่างที่ 11

นภาเริ่มต้นทำงานที่บริษัทแห่งหนึ่ง ในปีแรก นภาได้รับเงินเดือนเดือนละ 15,000 บาท ถ้านภาได้รับเงินเดือนเพิ่มขึ้นปีละ 300 บาท จงหาว่าในอีก 10 ปีข้างหน้า นภาจะได้รับเงินเดือนเดือนละเท่าใด

วิธีทำ เขียนลำดับเลขคณิตแทนเงินเดือนที่นภาได้รับแต่ละปีได้ดังนี้

$15000, 15300, 15600, \dots, a_{11}$

ลำดับที่ได้เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 15,000 และมีผลต่างร่วมเป็น 300

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_{11} = 15{,}000 + (11-1)(300) = 18{,}000$

ดังนั้น ในอีก 10 ปีข้างหน้า นภาจะได้รับเงินเดือนเดือนละ 18,000 บาท ■

ตัวอย่างที่ 12

กำหนดลำดับเลขคณิต 1, 4, 7, 10, 13, … จงพิจารณาว่า 12,345 อยู่ในลำดับนี้หรือไม่

วิธีทำ ลำดับเลขคณิตที่กำหนดให้มีพจน์แรกเป็น 1 และมีผลต่างร่วมเป็น 3

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้ $a_1 = 1$ และ $d = 3$

ถ้า 12,345 เป็นพจน์ของลำดับนี้ จะได้ว่าเมื่อแทน a_n ใน $a_n = a_1 + (n-1)d$ ด้วย 12,345 แล้ว n ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้
$$12{,}345 = 1 + (n-1)(3)$$
$$= 1 + 3n - 3$$
$$= 3n - 2$$

นั่นคือ $n = \frac{12{,}345 + 2}{3} = 4{,}115\frac{2}{3}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น 12,345 ไม่อยู่ในลำดับนี้ ■

แบบฝึกหัด 1.1.2

1. จงหาสี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิต เมื่อกำหนดให้

1) $a_1 = 2$ และ $d = 4$

2) $a_1 = 3$ และ $d = 5$

3) $a_1 = -3$ และ $d = 3$

4) $a_1 = -4$ และ $d = 2$

5) $a_1 = 5$ และ $d = -2$

6) $a_1 = -3$ และ $d = -4$

7) $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $d = \frac{1}{2}$

8) $a_1 = \frac{5}{2}$ และ $d = -\frac{3}{2}$

2. จงหาพจน์ของลำดับเลขคณิตที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) a_3 เมื่อกำหนดให้ $a_1 = 4$ และ $d = 3$

2) a_{12} เมื่อกำหนดให้ $a_1 = 7$ และ $d = -3$

3) a_{20} เมื่อกำหนดให้ $a_1 = \frac{4}{5}$ และ $d = -1$

4) a_{11} เมื่อกำหนดให้ $a_1 = 4$ และ $d = \frac{1}{2}$

3. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

1) $-2, 4, 10, \dots$

2) $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \dots$

3) $11, \frac{27}{2}, 16, \dots$

4) $19.74, 22.54, 25.34, \dots$

5) $x, x+2, x+4, \dots$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

6) $3a+2b, 2a+4b, a+6b, \dots$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

4. จงหาพจน์ที่ขาดหายไปของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

1) 13, 25, ___ , ___ , ___

2) 18, ___ , 11, ___ , ___

3) 13, ___ , ___ , ___ , 33 , ___

4) ___ , ___ , 100 , ___ , ___ , 142 , ___

5. จงหาพจน์ที่ 15 ของลำดับเลขคณิต $3, 8, 13, 18, 23, \ldots$

6. จงหาพจน์ที่ 20 และพจน์ที่ 50 ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ที่ n เป็น $-n-3$

7. จงหาพจน์แรกของลำดับเลขคณิตที่มี $a_6 = 12$ และ $a_{10} = 16$

8. จงหาพจน์ที่ 25 ของลำดับเลขคณิตที่มี $a_3 = 20$ และ $a_7 = 32$

9. จงหา a_n และ d ของลำดับเลขคณิตที่มี $a_2 = 16$ และ $a_{12} = 116$

10. -176 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับเลขคณิต $-1, -6, -11, \ldots$

11. ถ้า 39 และ 51 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์อีกหนึ่งพจน์อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ จงหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้

12. จงหาว่าจำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000 ซึ่งหารด้วย 13 ลงตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน

13. ถ้าสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ $a, 6a+2$ และ $8a+1$ จงหา a และพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

14. ถ้าผลบวกของสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ 12 และผลบวกของกำลังสามของแต่ละพจน์ของทั้งสามพจน์นี้ คือ 408 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

15. สมศักดิ์ทำงานที่บริษัทแห่งหนึ่งได้รับเงินเดือนเดือนละ 25,000 บาท และได้รับเงินเดือนเพิ่มขึ้นปีละ 1,000 บาท จงหาว่าเมื่อสมศักดิ์ทำงานได้ 6 ปี เขาจะได้รับเงินเดือนเดือนละเท่าใด

16. บริษัทขายรถยนต์แห่งหนึ่งรับซื้อรถยนต์คืนจากผู้ซื้อ โดยจะซื้อรถยนต์ที่ใช้แล้ว 1 ปี ในราคาที่ต่ำกว่าราคาที่บริษัทขาย 100,000 บาท สำหรับรถยนต์ที่ใช้แล้วเกิน 1 ปี ราคาซื้อคืนจะลดลงอีกปีละ 70,000 บาท ถ้าซื้อรถยนต์จากบริษัทนี้มาในราคาหนึ่งล้านบาท จงหาว่าเมื่อใช้รถยนต์ไปแล้ว 5 ปี บริษัทจะรับซื้อรถยนต์คืนในราคาที่ต่ำกว่าราคาที่ซื้อจากบริษัทเท่าใด

1.1.3 ลำดับเรขาคณิต

พิจารณาลำดับ 2, 6, 18, 54, 162 จะเห็นว่าแต่ละพจน์ได้จากการคูณพจน์ก่อนหน้าที่อยู่ติดกันด้วย 3 หรืออัตราส่วนของพจน์หลังต่อพจน์หน้าที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 3 เสมอ นั่นคือ $\frac{6}{2}=\frac{18}{6}=\frac{54}{18}=\frac{162}{54}=3$ เรียกลำดับที่มีสมบัติเช่นนี้ว่า ลำดับเรขาคณิต

บทนิยาม 3

ลำดับเรขาคณิต (geometric sequence) คือ ลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วนนี้ว่า **อัตราส่วนร่วม (common ratio)**

จากบทนิยาม ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว r ที่ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่างของลำดับเรขาคณิต

1) $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี 2 เป็นอัตราส่วนร่วม

2) $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี -1 เป็นอัตราส่วนร่วม

3) $16, 8, 4, 2, 1, \ldots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $\frac{1}{2}$ เป็นอัตราส่วนร่วม

4) $-1, 4, -16, 64, -256, \ldots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี -4 เป็นอัตราส่วนร่วม

สามารถกำหนดลำดับเรขาคณิต $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ได้ดังนี้

จาก $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $a_{n+1} = a_n r$

ให้ a_1 และ r เป็นค่าคงตัว จะได้

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 r \\
a_3 &= a_2 r = (a_1 r)r = a_1 r^2 \\
a_4 &= a_3 r = (a_1 r^2)r = a_1 r^3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} r = (a_1 r^{n-2})r = a_1 r^{n-1}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 13

จงหาสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี $\frac{3}{4}$ เป็นพจน์แรก และ 4 เป็นอัตราส่วนร่วม

วิธีทำ ให้ $a_1 = \frac{3}{4}$ และ $r = 4$

จะได้

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 r = \frac{3}{4}(4) = 3 \\
a_3 &= a_2 r = 3(4) = 12 \\
a_4 &= a_3 r = 12(4) = 48
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{3}{4}, 3, 12$ และ 48 ■

ตัวอย่างที่ 14

จงหาพจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิต 4, 20, 100, …

วิธีทำ จากลำดับเรขาคณิต 4, 20, 100, … จะได้ $a_1 = 4$ และ $r = \frac{20}{4} = 5$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้
$$\begin{aligned} a_7 &= 4(5^{7-1}) \\ &= 4(5^6) \\ &= 4(15,625) \\ &= 62,500 \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 62,500 ■

ตัวอย่างที่ 15

จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต 8, 16, 32, 64, …

วิธีทำ จากลำดับเรขาคณิต 8, 16, 32, 64, … จะได้ $a_1 = 8$ และ $r = \frac{16}{8} = 2$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้
$$\begin{aligned} a_n &= 8(2^{n-1}) \\ &= 2^3(2^{n-1}) \\ &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 2^{n+2} ■

ตัวอย่างที่ 16

ถ้า 6 และ 24 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์อีกหนึ่งพจน์อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ จงหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ ให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 และ 24 จะได้ $6, a, 24$ เป็นลำดับเรขาคณิต

ซึ่ง $\frac{a}{6} = \frac{24}{a}$

$a^2 = 144$

จะได้ $a = 12$ หรือ $a = -12$

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 และ 24 คือ 12 หรือ -12 ■

ตัวอย่างที่ 17

จงหา a, b และ c ของลำดับเรขาคณิต $8, a, b, c, \frac{1}{2}, \ldots$

วิธีทำ จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\frac{1}{2} = 8r^{5-1}$

$\frac{1}{16} = r^4$

นั่นคือ $r = \frac{1}{2}$ หรือ $r = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น เมื่ออัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{1}{2}$ จะได้ a, b และ c คือ $8\left(\frac{1}{2}\right)^1, 8\left(\frac{1}{2}\right)^2, 8\left(\frac{1}{2}\right)^3$

หรือ 4, 2 และ 1 ตามลำดับ

และเมื่ออัตราส่วนร่วมเป็น $-\frac{1}{2}$ จะได้ a, b และ c คือ $8\left(-\frac{1}{2}\right)^1, 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2, 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

หรือ -4, 2 และ -1 ตามลำดับ ■

ตัวอย่างที่ 18

ในเมืองหนึ่งมีประชากรอาศัยอยู่ 100,000 คน ถ้าจำนวนประชากรในเมืองนี้เพิ่มขึ้น 2% ทุกปี ในอีก 10 ปีข้างหน้า จะมีจำนวนประชากรในเมืองนี้ประมาณกี่คน

วิธีทำ พิจารณาจำนวนประชากรใน 2 ปีแรก ดังนี้

เริ่มต้น ครบ 1 ปี ครบ 2 ปี

100,000

ประชากรเดิม + ประชากรที่เพิ่ม

$100,000 + 100,000(0.02)$

$= 100,000(1+0.02)$

$= 100,000(1.02)$

ประชากรเดิม + ประชากรที่เพิ่ม

$100,000(1.02) + 100,000(1.02)(0.02)$

$= 100,000(1.02)(1+0.02)$

$= 100,000(1.02)(1.02)$

$= 100,000(1.02)^2$

จะเห็นว่าเมื่อนำจำนวนประชากรในแต่ละปีมาเขียนเรียงตามลำดับ จะเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี 1.02 เป็นอัตราส่วนร่วม ดังนี้

$$100000, 100000(1.02), 100000(1.02)^2, \ldots$$

ดังนั้น จำนวนประชากรเมื่อครบปีที่ 10 คือ พจน์ที่ 11 ของลำดับนี้

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_{11} = 100,000(1.02)^{11-1}$

$= 100,000(1.02)^{10}$

$\approx 100,000(1.218994)$

$\approx 121,899$

นั่นคือ ในอีก 10 ปีข้างหน้า เมืองนี้จะมีประชากรประมาณ 121,899 คน ■

แบบฝึกหัด 1.1.3

1. จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับเลขคณิตหรือลำดับเรขาคณิต ถ้าเป็นลำดับเลขคณิต จงหาผลต่างร่วม ถ้าเป็นลำดับเรขาคณิต จงหาอัตราส่วนร่วม
   1) $7, 9, 11, 13, \ldots, 2n+5$
   2) $6, -6, 6, -6, \ldots, 6(-1)^{n-1}$
   3) $4, 2, 0, -2, \ldots, 6-2n$
   4) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots, 9\left(\frac{1}{3}\right)^n$
   5) $-\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{7}, \ldots, -\frac{n}{n+3}$

2. จงหาสามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้
   1) $1, 7, 49, 343, \ldots$
   2) $-1, 2, -4, 8, \ldots$
   3) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

3. จงหาพจน์ที่ 9 ของลำดับเรขาคณิต $2, 4, 8, 16, \ldots$

4. จงหาพจน์ที่ 11 ของลำดับเรขาคณิต $2, -10, 50, -250, \ldots$

5. จงหาพจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \ldots$

6. จงหาพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้
   1) $-3, -6, -12, \ldots$
   2) $10, -5, \frac{5}{2}, \ldots$
   3) $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{25}{4}, \ldots$
   4) $\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \ldots$
   5) $-\frac{2}{9}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{32}, \ldots$
   6) $2, 2\sqrt{3}, 6, \ldots$
   7) $-1, 0.3, -0.09, \ldots$
   8) $ab^3, a^2b^2, a^3b, \ldots$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์

7. จงหาพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี 16 เป็นพจน์ที่ห้า และ 2 เป็นอัตราส่วนร่วม

8. จงหาอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_3 = 12$ และ $a_6 = 96$

9. 162 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับเรขาคณิต $2, -6, 18, \ldots$

10. จงหาพจน์ที่ขาดหายไปของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้
    1) $4, 1, ___, ___, ___$
    2) $2, ___, \frac{2}{9}, ___, ___$
    3) $\frac{3}{7}, ___, ___, ___, \frac{3}{343}, ___$
    4) $___, ___, 1, ___, ___, \frac{8}{27}, ___$

11. จงหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์สองพจน์ของลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้
    1) 5 และ 20
    2) 8 และ 12

12. ถ้าสามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต คือ $a+3, a+20$ และ $a+105$ จงหา a และพจน์ทั่วไปของลำดับนี้

13. ใน พ.ศ. 2550 อำเภอหนึ่งมีประชากร 60,000 คน ถ้าประชากรในอำเภอนี้เพิ่มขึ้นปีละ 2% จงหาสูตรการคำนวณจำนวนประชากรในแต่ละปี พร้อมทั้งหาจำนวนประชากรใน พ.ศ. 2565

14. เมื่อปล่อยลูกบอลที่ความสูง 2 เมตร จากระดับพื้นดิน แล้วในแต่ละครั้งที่ลูกบอลกระทบพื้นลูกบอลจะกระดอนขึ้น โดยความสูงของลูกบอลจากระดับพื้นดินจะลดลง 8% จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสูงของลูกบอล เมื่อลูกบอลกระทบพื้นไป n ครั้ง

1.1.4 ลำดับฮาร์มอนิก

บทนิยาม 4

ลำดับฮาร์มอนิก (harmonic sequence) คือ ลำดับ a_n ซึ่งมีสมบัติว่า ลำดับของส่วนกลับ $b_n = \frac{1}{a_n}$ เป็นลำดับเลขคณิต

ลำดับฮาร์มอนิกจะศึกษาผ่านลำดับของส่วนกลับซึ่งเป็นลำดับเลขคณิต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 19

จงแสดงว่าลำดับที่ $a_n = \frac{2}{3n}$ เป็นลำดับฮาร์มอนิก

วิธีทำ กำหนด $b_n = \frac{1}{a_n}$ จะได้ว่า $b_n = \frac{3n}{2}$

สังเกตว่า $b_{n+1} - b_n = \frac{3(n+1)}{2} - \frac{3n}{2} = \frac{3}{2}$

ดังนั้น ลำดับ b_n เป็นลำดับเลขคณิต นั่นคือ ลำดับ a_n เป็นลำดับฮาร์มอนิก ■

ตัวอย่างที่ 20

กำหนด a_n เป็นลำดับฮาร์มอนิกซึ่ง $a_2 = \frac{1}{3}$ และ $a_3 = \frac{1}{5}$ จงหา a_1

วิธีทำ กำหนด $b_n = \frac{1}{a_n}$ จะได้ว่า b_n เป็นลำดับเลขคณิต

จาก $b_2 = \frac{1}{a_2} = 3$ และ $b_3 = \frac{1}{a_3} = 5$

ดังนั้น ผลต่างร่วมของลำดับ b_n คือ $d = 5 - 3 = 2$

จาก $b_2 = b_1 + d$ จะได้ $b_1 = b_2 - d = 3 - 2 = 1$

นั่นคือ $a_1 = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{1} = 1$

แบบฝึกหัด 1.1.4

1. ให้ a_n เป็นลำดับฮาร์มอนิกซึ่ง $a_3 = 3$ และ $a_6 = 6$ จงหา $a_4 + a_5$

2. จงพิจารณาว่าลำดับ $\log_2 3, \log_4 3, \log_8 3, \ldots, \log_{2^n} 3, \ldots$ เป็นลำดับฮาร์มอนิกหรือไม่

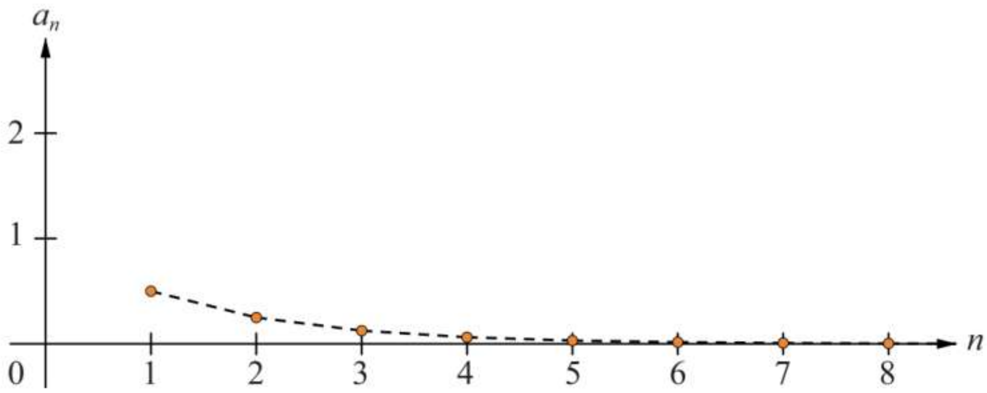
3. ให้ a_n เป็นลำดับฮาร์มอนิกซึ่ง $a_1 = 1$ และ $a_2 + a_3 = 1$ จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ a_2

1.2 ลิมิตของลำดับอนันต์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมบัติบางประการของลำดับ โดยจะพิจารณาพจน์ที่ n ของลำดับ เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

1) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{1}{2^n}$ ในรูปที่ 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	...

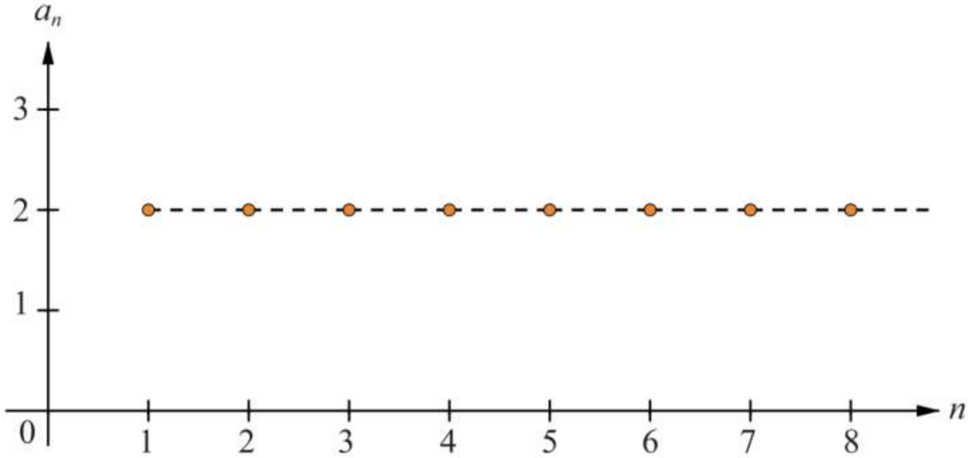


รูปที่ 1

จากกราฟในรูปที่ 1 จะเห็นว่า ถ้า n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n จะลดลงและเข้าใกล้ 0 แต่จะไม่เท่ากับ 0

หมายเหตุ จะใช้เส้นประเพื่อแสดงให้เห็นแนวของจุด แต่เส้นประมิใช่ส่วนหนึ่งของกราฟของลำดับ

2) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = 2$ ในรูปที่ 2

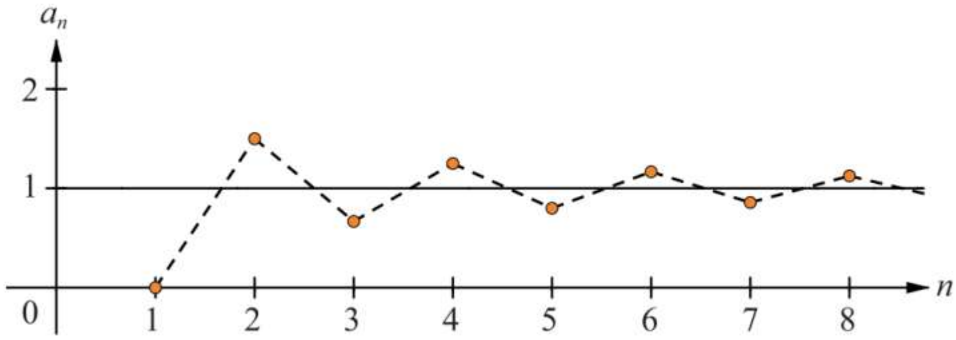


รูปที่ 2

จากกราฟในรูปที่ 2 จะเห็นว่า a_n เป็น 2 เสมอ สำหรับทุก n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

3) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ ในรูปที่ 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
a_n	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{9}{8}$	…

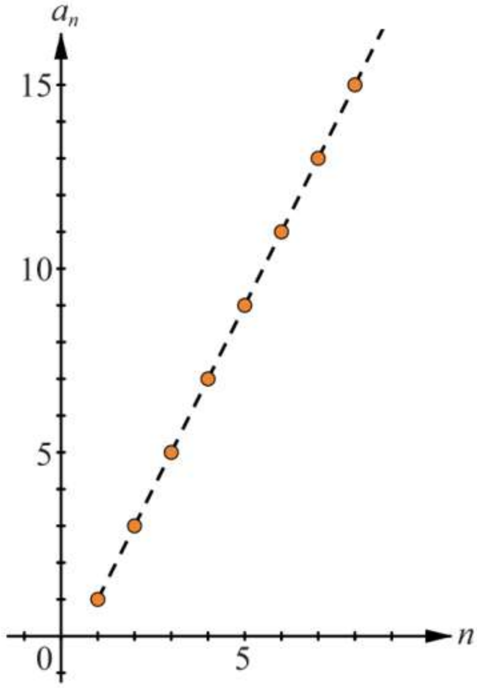


รูปที่ 3

จากกราฟในรูปที่ 3 จะเห็นว่าแนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้เส้นตรง $y = 1$ ซึ่งหมายความว่าเมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n จะเข้าใกล้ 1 แต่จะไม่เท่ากับ 1

4) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = 2n - 1$ ในรูปที่ 4

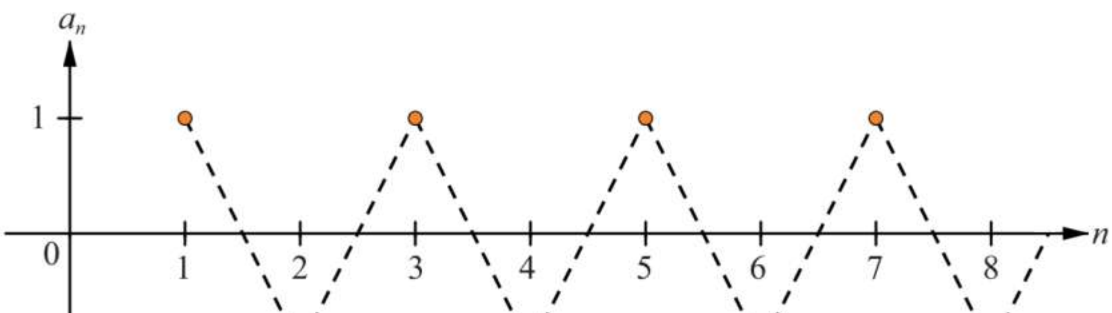
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	3	5	7	9	11	13	15	...



รูปที่ 4

จากกราฟในรูปที่ 4 จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะมากขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

5) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = (-1)^{n+1}$ ในรูปที่ 5



รูปที่ 5

จากกราฟในรูปที่ 5 จะเห็นว่า เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ พจน์ที่ n เป็น 1 และเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ พจน์ที่ n เป็น -1 ดังนั้น เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับนี้ จึงไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

บทนิยาม 5

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ ถ้า n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น จะเขียน $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ L) และจะเรียก L ว่า **ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence)** และกล่าวว่าลำดับนี้มีลิมิตเท่ากับ L เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า **ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)** และเรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้าว่า **ลำดับลู่ออก (divergent sequence)**

เมื่อพิจารณาลำดับในข้อ 1) ถึง 5) จะได้ว่า

ในข้อ 1) ลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ เป็น 0 และลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

ในข้อ 2) ลิมิตของลำดับ $a_n = 2$ เป็น 2 และลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

ในข้อ 3) ลิมิตของลำดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ เป็น 1 และลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

ในข้อ 4) เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว $a_n = 2n - 1$ ไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใด จะกล่าวว่าลิมิตของลำดับ $a_n = 2n - 1$ ไม่มีค่า ลำดับนี้จึงไม่ใช่ลำดับลู่เข้า ดังนั้น ลำดับ $a_n = 2n - 1$ เป็นลำดับลู่ออก

ในข้อ 5) เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว $a_n = (-1)^{n+1}$ ไม่เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว จะกล่าวว่าลิมิตของลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}$ ไม่มีค่า ดังนั้น ลำดับนี้จึงเป็นลำดับลู่ออก และจะเรียกลำดับลู่ออกที่มีลักษณะของกราฟขึ้นและลงสลับกันโดยไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่งเช่นนี้ว่า **ลำดับแกว่งกวัด (oscillating sequence)**

เสริมสมอง : ค่าคงตัว e

e ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะ มีค่าประมาณ 2.71828 นั้น ได้รับการค้นพบโดย Jacob Bernoulli ใน ค.ศ. 1683 ในขณะที่เขากำลังศึกษาเรื่องดอกเบี้ยทบต้น โดยถ้ากำหนดลำดับ $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ จะได้ว่า $a_1 = 2$, $a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$, $a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \approx 2.3704$ และเมื่อ n มากขึ้นเรื่อย ๆ จะได้ $a_{1,000} \approx 2.7169$, $a_{10,000} \approx 2.7181$, $a_{100,000} \approx 2.7183$ และเมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว ลำดับ a_n จะลู่เข้าสู่ค่า 2.718281828459... นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

ตัวอย่างที่ 21

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ

1) $a_n = \frac{1}{n^2}$ 2) $a_n = n^3$

วิธีทำ 1) จาก $a_n = \frac{1}{n^2}$ เขียนลำดับได้เป็น $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$

จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะลดลงและเข้าใกล้ 0

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$

2) จาก $a_n = n^3$ เขียนลำดับได้เป็น $1, 8, 27, 64, \ldots, n^3, \ldots$

จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะมากขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} n^3$ ไม่มีค่า ■

ลิมิตของลำดับในตัวอย่างที่ 21 สอดคล้องกับทฤษฎีบทต่อไปนี้ ทั้งนี้ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับในบทนี้จะนำไปใช้โดยขอละการพิสูจน์ไว้

ทฤษฎีบท 1

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}=0$ และ $\lim_{n\to\infty}n^r$ ไม่มีค่า

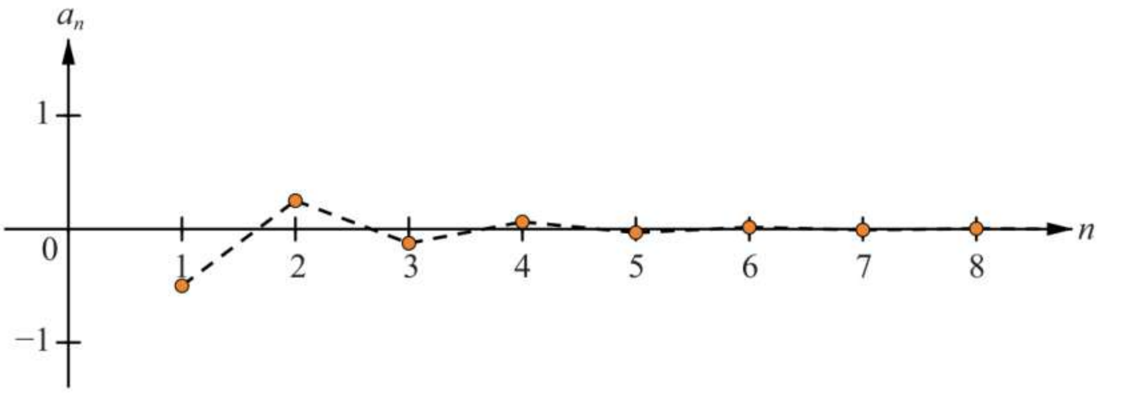
ตัวอย่างที่ 22

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ

1) $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 2) $a_n=\left(-\frac{5}{4}\right)^n$ 3) $a_n=2^n$

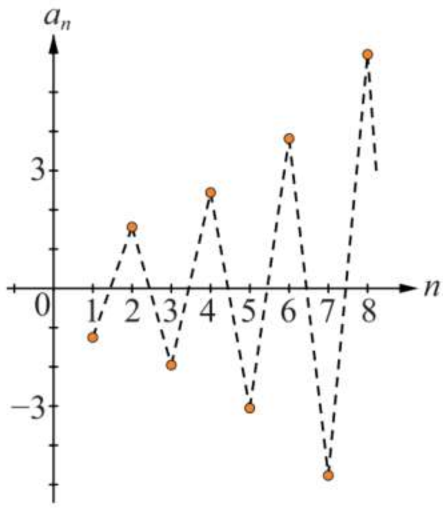
วิธีทำ 1) จาก $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ เขียนลำดับได้เป็น $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\ldots,\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ldots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



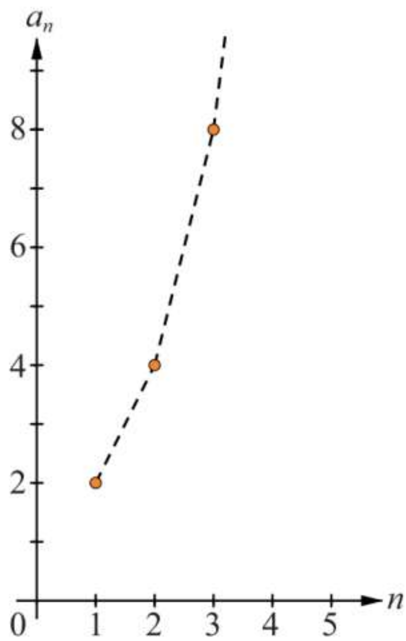
จากกราฟ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$

2) จาก $a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ เขียนลำดับได้เป็น $-\frac{5}{4}, \frac{25}{16}, -\frac{125}{64}, \ldots, \left(-\frac{5}{4}\right)^n, \ldots$
เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{5}{4}\right)^n$ ไม่มีค่า

3) จาก $a_n = 2^n$ เขียนลำดับได้เป็น $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$
เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} 2^n$ ไม่มีค่า

ลิมิตของลำดับในตัวอย่างที่ 22 สอดคล้องกับทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2

ให้ r เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

ถ้า $|r|<1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$
ถ้า $|r|>1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ ไม่มีค่า

ทฤษฎีบท 3

ให้ a_n, b_n, t_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้ว่า

1. ถ้า $t_n = c$ ทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = cA$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A + B$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A - B$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = AB$
6. ถ้า $b_n \neq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$

ตัวอย่างที่ 23

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ $a_n = 5$

วิธีทำ เนื่องจาก 5 เป็นค่าคงตัว ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$ ■

ตัวอย่างที่ 24

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{5}{n}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} &= 5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \\ &= 5(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 25

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{4-3n+n^2}{2n^3-3n^2+5}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{4-3n+n^2}{2n^3-3n^2+5} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{4}{n^3}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^3}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^3}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^3}} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}} \\ &= \frac{0-0+0}{2-0+0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 25 ลิมิตของลำดับที่พจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของเศษส่วนของพหุนาม ถ้าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวส่วนมากกว่าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวเศษแล้ว ลำดับจะมีลิมิตเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 26

จงแสดงว่าลำดับที่มีพจน์ทั่วไปในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้า

1) $a_n = \dfrac{3+2n}{n}$ 2) $b_n = \dfrac{3n^3 - n}{5n^3 + 17}$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+2n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty} 2 = 0 + 2 = 2$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

2) เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - n}{5n^3 + 17} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(3 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(5 + \frac{17}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{17}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 5 + \lim_{n\to\infty} \frac{17}{n^3}} = \frac{3}{5}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า ■

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 26 ลิมิตของลำดับที่พจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของเศษส่วนของพหุนาม ถ้าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวเศษเท่ากับดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวส่วนแล้ว ลำดับจะเป็นลำดับลู่เข้าที่มีลิมิตไม่เป็นศูนย์

ในการแสดงว่าลำดับที่กำหนดให้นั้นลู่ออก นอกจากการพิจารณากราฟแล้ว ยังสามารถใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$ แล้ว ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ จะลู่ออก

ตัวอย่างที่ 27

จงตรวจสอบว่าลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= 0+0 \\ &= 0\end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่าลำดับ a_n ลู่ออก ■

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 27 ลิมิตของลำดับที่พจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของเศษส่วนของพหุนาม ถ้าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวส่วนน้อยกว่าดีกรีของพหุนามที่เป็นตัวเศษแล้ว ลำดับจะลู่ออก

ตัวอย่างที่ 28

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-3}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-3} = \frac{n^2\left(n^2-3\right) - n^3\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)\left(n^2-3\right)}$$

$$= \frac{n^4 - 3n^2 - n^4 - n^3}{n^3 + n^2 - 3n - 3}$$

$$= \frac{-3n^2 - n^3}{n^3 + n^2 - 3n - 3}$$

$$= \frac{n^3\left(-\frac{3}{n} - 1\right)}{n^3\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{3}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{3}{n^3}}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{3}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{3}{n^3}}$$

$$= \frac{-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} - \lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} - \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}}$$

$$= \frac{0-1}{1+0-0-0}$$

$$= -1$$

■

ทฤษฎีบท 5

ให้ a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ L เป็นจำนวนจริง และ m เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง จะได้ว่า

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$

ตัวอย่างที่ 29

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ $a_n = \sqrt{\dfrac{4n-1}{n+1}}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\\ &= \frac{4}{1}\\ &= 4\end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 5 จะได้

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n-1}{n+1}} &= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n+1}}\\ &= \sqrt{4}\\ &= 2\end{aligned}$$

■

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงเขียนกราฟเพื่อตรวจสอบว่าลำดับที่มีพจน์ทั่วไปในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิต

1) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$

2) $a_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$

3) $a_n = \frac{5}{n+1}$

4) $a_n = \frac{2^n}{n}$

5) $a_n = n\left(1+\left(-1\right)^n\right)$

6) $a_n = 4-\frac{1}{2^n}$

7) $a_n = 4\left(0.5\right)^{n-1}$

8) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$

9) $a_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$

10) $a_n = \frac{n}{2^n+2}$

2. จงใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับเพื่อตรวจสอบว่าลำดับที่มีพจน์ทั่วไปในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิต

1) $a_n = \frac{8}{3n}$

2) $a_n = \frac{8^n}{7^n}$

3) $a_n = \frac{4^{1-n}}{2^{8-2n}}$

4) $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

5) $a_n = 4+\frac{1}{n}$

6) $a_n = \frac{6n-4}{6n}$

7) $a_n = \frac{3n+5}{6}$

8) $a_n = \frac{n}{n+1}$

9) $a_n = \frac{4+5n}{n^2}$

10) $a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$

11) $a_n = \frac{3n^2-5n}{7n-1}$

12) $a_n = \frac{7n^2}{5n^2-3}$

13) $a_n = \dfrac{4n^2 - 2n + 3}{n^2}$

14) $a_n = \dfrac{3n^2 - 1}{10n - 5n^2}$

15) $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

16) $a_n = \dfrac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$

17) $a_n = \dfrac{2^{n-1} + 3}{3^{n+2}}$

18) $a_n = \dfrac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$

19) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 - 1}}{4n}$

20) $a_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 - 1}}{2n + \sqrt[3]{n^3 + 2}}$

21) $a_n = \dfrac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}}$

22) $a_n = \dfrac{8n^2 + 5n + 2}{3 + 2n}$

23) $a_n = \left(1 + \dfrac{r}{12}\right)^n$ เมื่อ $r > 0$

24) $a_n = \dfrac{n^2 - 5}{n + 2} + \dfrac{1 - n^3}{n^2 + 3n}$

3. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นจริง จงให้เหตุผล ถ้าเป็นเท็จ จงยกตัวอย่างค้าน
   1) ถ้า a_n และ b_n เป็นลำดับลู่ออก แล้ว $a_n + b_n$ เป็นลำดับลู่ออก
   2) ถ้า a_n เป็นลำดับลู่เข้า และ b_n เป็นลำดับลู่ออก แล้ว $a_n + b_n$ เป็นลำดับลู่เข้า

4. บริษัทแห่งหนึ่งมีงบรายจ่ายของปีแรกอยู่ที่ 2.5 พันล้านบาท แต่เนื่องจากราคาน้ำมันที่สูงขึ้น บริษัทจึงวางแผนที่จะประหยัดงบประมาณโดยปรับลดงบรายจ่ายลง 20% ของปีก่อนหน้า
   1) จงคำนวณงบรายจ่ายของสี่ปีแรกหลังจากปรับลดงบ
   2) จงเขียนงบรายจ่ายในปีที่ n
   3) จงตรวจสอบว่าลำดับของงบรายจ่ายนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่

1.3 อนุกรม

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์ จะเรียกการเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ว่า **อนุกรมจำกัด (finite series)**

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

$\vdots$

และเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม

ตัวอย่างของอนุกรมจำกัด

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ เป็นอนุกรมจำกัดที่ได้จากลำดับจำกัด $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

2) $2+4+6+\cdots+2n$ เป็นอนุกรมจำกัดที่ได้จากลำดับจำกัด $2, 4, 6, \dots, 2n$

3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}$ เป็นอนุกรมจำกัดที่ได้จากลำดับจำกัด $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^n}$

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n
\end{aligned}
$$

1.3.1 อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต เรียกว่า **อนุกรมเลขคณิต (arithmetic series)**

พิจารณาอนุกรมเลขคณิต $1+2+3+\cdots+100$ ที่ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 2, 3, \dots, 100$

การหาผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรมนี้ ทำได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + \cdots + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + \cdots + & 1 \\ \hline \underbrace{101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + \cdots + & 101}_{100 \text{ ตัว}} \end{array} \; +$$

เนื่องจาก $\underbrace{101+101+101+\cdots+101}_{100\text{ ตัว}} = 100\times101$

ดังนั้น $1+2+3+\cdots+100 = \dfrac{100\times101}{2} = 5{,}050$

จากวิธีการหาผลบวกข้างต้น สามารถหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต ได้ดังนี้

ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม

ดังนั้น

$$\begin{aligned} S_n &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \\ &= a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+(a_1+(n-1)d) \qquad \text{---------} \ (1) \end{aligned}$$

หรืออาจเขียน S_n ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} S_n &= a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1 \\ &= a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+(a_n-(n-1)d) \qquad \text{---------} \ (2) \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$2S_n = \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n \text{ วงเล็บ}}$$

$$2S_n = n(a_1+a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ คือ $\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

เสริมสมอง : Carl Friedrich Gauss



Carl Friedrich Gauss (ค.ศ. 1777 – 1855) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน สามารถหาวิธีคำนวณผลบวกของจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 100 ได้ตั้งแต่ตอนที่เขายังศึกษาอยู่ชั้นประถมศึกษา โดยเขาสังเกตว่าเป็นการบวกของจำนวน 50 คู่ ได้แก่ $1+100, 2+99, 3+98, \dots, 50+51$ ซึ่งผลบวกของแต่ละคู่เป็น 101 จึงได้คำตอบว่า $1+2+3+\cdots+100$ เท่ากับ 50×101 หรือ 5,050 แนวคิดนี้ของ Gauss ได้พัฒนาเป็นวิธีการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 30

จงหาผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต $7, 15, 23, \dots$

วิธีทำ ลำดับที่กำหนดให้มี $a_1 = 7$ และ $d = 8$

แทน n ด้วย 7 ใน $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$a_7 = 7 + (7-1)(8) = 55$$

จาก $$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

จะได้ $$S_7 = \frac{7}{2}(7+55) = 217$$

ดังนั้น ผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 217 ■

ตัวอย่างที่ 31

จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $7+10+13+\cdots+157$

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1=7, d=3$ และ $a_n=157$

จาก $a_n = a_1+(n-1)d$

จะได้
$$\begin{aligned}157 &= 7+(n-1)(3)\\157 &= 7+3n-3\\157 &= 3n+4\\153 &= 3n\\n &= 51\end{aligned}$$

จากโจทย์ แสดงว่าต้องการหาผลบวก 51 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $7+10+13+\cdots+157$ นั่นคือ ต้องการหา S_{51}

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$

จะได้
$$\begin{aligned}S_{51} &= \frac{51}{2}(7+157)\\&= 4,182\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 4,182 ■

ตัวอย่างที่ 32

จงหาผลบวกของจำนวนคู่ตั้งแต่ 18 ถึง 482

วิธีทำ เนื่องจาก $18+20+22+24+\cdots+482$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1=18, d=2$ และ $a_n=482$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $482 = 18 + (n-1)(2)$

$482 = 18 + 2n - 2$

$2n = 466$

$n = 233$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{233} = \frac{233}{2}(18 + 482)$

$= 58,250$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคู่ตั้งแต่ 18 ถึง 482 คือ $58,250$ ■

หมายเหตุ นอกจากจะหา S_n จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ เมื่อทราบ n, a_1 และ a_n แล้ว ยังสามารถหา S_n เมื่อทราบ n, a_1 และ d ได้ดังนี้

เนื่องจาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + \left(a_1 + (n-1)d\right)\right)$

$= \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม
ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ หรือ } S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$$

ตัวอย่างที่ 33

หอประชุมของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีเก้าอี้จัดไว้แถวแรก 12 ตัว แถวที่สอง 14 ตัว แถวที่สาม 16 ตัว เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ถ้าจัดเก้าอี้ไว้ในหอประชุมทั้งหมด 15 แถว จะมีเก้าอี้ในหอประชุมนี้ทั้งหมดกี่ตัว

วิธีทำ ลำดับของจำนวนเก้าอี้แต่ละแถวในหอประชุม คือ ลำดับเลขคณิต $12, 14, 16, \dots, a_n$ ที่มี $a_1 = 12, d = 2$ และ $n = 15$

ดังนั้น จำนวนเก้าอี้ใน 15 แถวของหอประชุม คือ S_{15}

จาก $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

จะได้ $S_{15} = \frac{15}{2}\left(2(12) + (15-1)2\right)$

$= 390$

ดังนั้น ในหอประชุมของโรงเรียนแห่งนี้มีเก้าอี้ทั้งหมด 390 ตัว ■

แบบฝึกหัด 1.3.1

1. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต เมื่อกำหนดให้
   1) $n = 4, a_1 = 3$ และ $d = 2$
   2) $n = 11, a_1 = -7$ และ $d = 3$
   3) $n = 14, a_1 = -5$ และ $d = -2$
   4) $n = 7, a_1 = 5$ และ $a_n = 29$
   5) $n = 9, a_1 = -3$ และ $a_n = 37$

2. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต เมื่อกำหนดให้
   1) $n = 50$ และลำดับเลขคณิต คือ $5, 7, 9, 11, 13, \dots$
   2) $n = 30$ และลำดับเลขคณิต คือ $0, 2, 4, 6, 8, \dots$
   3) $n = 60$ และลำดับเลขคณิต คือ $-2, 3, 8, 13, 18, \dots$

4) $n = 75$ และลำดับเลขคณิต คือ $5, 2, -1, -4, -7, \ldots$

5) $n = 50$ และลำดับเลขคณิต คือ $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$

3. จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิตต่อไปนี้
   1) $6 + 9 + 12 + 15 + \cdots + 99$
   2) $(-7) + (-10) + (-13) + (-16) + \cdots + (-109)$
   3) $(-7) + (-4) + (-1) + 2 + \cdots + 131$

4. ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์ที่ 10 คือ 20 และพจน์ที่ 5 คือ 10 จงหาผลบวกของพจน์ที่ 8 ถึงพจน์ที่ 15

5. ทับทิมเริ่มออมเงินวันแรก 1 บาท วันที่สอง 2 บาท วันที่สาม 3 บาท ถ้าทับทิมออมเงินเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนครบ 30 วัน ทับทิมจะมีเงินออมทั้งหมดเท่าใด

6. จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิตที่มีพจน์แรก คือ 6 ผลต่างร่วม คือ 4 และพจน์สุดท้าย คือ 26

7. จงหาผลบวกของจำนวนคี่บวก 100 จำนวนแรก

8. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มบวกยี่สิบจำนวนแรกที่เป็นพหุคูณของ 3

9. จงหาผลบวกของจำนวนคี่ตั้งแต่ 17 ถึง 379

10. จัดแผ่นไม้ที่มีขนาดเท่ากันกองหนึ่งวางซ้อนกัน โดยเริ่มจากวางแผ่นไม้ในชั้นล่างเรียงตามแนวยาวชิดกันจำนวน 30 แผ่น จากนั้นวางแผ่นไม้ในชั้นที่ 2 โดยให้แนวกึ่งกลางตามด้านยาวของแผ่นไม้แต่ละแผ่นอยู่ตรงกับรอยต่อของแผ่นไม้แต่ละคู่ในชั้นแรก ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนชั้นบนสุดมีแผ่นไม้ 5 แผ่น จงหาว่าแผ่นไม้กองนี้มีกี่ชั้น และมีแผ่นไม้ทั้งหมดกี่แผ่น

1.3.2 อนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต เรียกว่า **อนุกรมเรขาคณิต (geometric series)**

พิจารณาลำดับ $1, 3, 9, 27, \ldots, 6561$ ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี 3 เป็นอัตราส่วนร่วม

การหาผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับเรขาคณิตข้างต้นทำได้ดังนี้

ให้ $S = 1+3+9+27+\cdots+6,561$ --------- (1)

นั่นคือ $3S = 3+9+27+\cdots+6,561+19,683$ --------- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$$2S = 19,683-1 = 19,682$$

$$S = 9,841$$

ดังนั้น $1+3+9+27+\cdots+6,561 = 9,841$

จากวิธีการหาผลบวกข้างต้น สามารถหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต ได้ดังนี้

ให้ $a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

ดังนั้น $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1}$ --------- (3)

และ $rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + a_1r^n$ --------- (4)

จาก (3) และ (4) จะได้

$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n-1)$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

หรือ $$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$

ตัวอย่างที่ 34

จงหาผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต 1, 2, 4, 8, …

วิธีทำ ลำดับที่กำหนดให้มี $a_1 = 1$ และ $r = 2$

แทน n ด้วย 8 ใน $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ จะได้

$$S_8 = \frac{1(1-2^8)}{1-2} = \frac{2^8-1}{2-1} = 255$$

ดังนั้น ผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 255 ■

ตัวอย่างที่ 35

จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \ldots$

วิธีทำ ลำดับที่กำหนดให้มี $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $r = \frac{1}{3}$

แทน n ด้วย 10 ใน $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ จะได้

$$S_{10} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)$$

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)$ ■

ตัวอย่างที่ 36

จงหาผลบวกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{256}$

วิธีทำ ลำดับที่กำหนดให้มี $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$ และ $a_n = \frac{1}{256}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\frac{1}{256} = 1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$8 = n-1$$

$$n = 9$$

แทน n ด้วย 9 ใน $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ $S_9 = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$$S_9 = \frac{1-\frac{1}{512}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{511}{256}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{511}{256}$ ■

ตัวอย่างที่ 37

กานดาตั้งใจจะออมเงินเพื่อซื้ออุปกรณ์กีฬา โดยวันแรกจะออมเงิน 20 บาท วันที่สอง 40 บาท วันที่สาม 80 บาท เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เมื่อครบ 7 วัน กานดาจะมีเงินออมทั้งหมดเท่าใด

วิธีทำ จำนวนเงินที่กานดาออมในแต่ละวัน คือ ลำดับเรขาคณิต $20, 40, 80, \ldots, a_n$ ที่มี $a_1 = 20$ และ $r = 2$

ดังนั้น จำนวนเงินที่กานดาออมเมื่อครบ 7 วัน คือ S_7

จาก $$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

จะได้ $$S_7 = \frac{20(1-2^7)}{1-2}$$

$$= \frac{20(2^7-1)}{2-1}$$

$$= 2,540$$

ดังนั้น เมื่อครบ 7 วัน กานดาจะมีเงินออมทั้งหมด 2,540 บาท ■

ตัวอย่างที่ 38

วรรัตน์เป็นแพทย์หญิงบรรจุใหม่ที่โรงพยาบาลแห่งหนึ่งในชนบทซึ่งเป็นบ้านเกิดของเธอ ในความเป็นจริงแล้ววรรัตน์สามารถเลือกที่จะบรรจุที่โรงพยาบาลใหญ่ในกรุงเทพฯ ได้เพราะมีผลการเรียนดีเด่น แต่เธอเลือกที่จะกลับมาพัฒนาบ้านเกิดตามอุดมการณ์ของเธอ และดูแลบิดามารดาอย่างใกล้ชิด โดยวรรัตน์จะให้เงินบิดามารดาไว้ใช้จ่ายส่วนตัวเดือนละ 2,000 บาท และจะเพิ่มเงินให้ร้อยละ 5 ต่อปี จงหาว่า

1) ในปีที่ 7 วรรัตน์จะให้เงินบิดามารดาเดือนละเท่าใด
2) เมื่อเวลาผ่านไป 15 ปี วรรัตน์ให้เงินบิดามารดารวมแล้วเป็นเงินเท่าใด

วิธีทำ 1) ในปีแรก วรรัตน์ให้เงินบิดามารดาเดือนละ 2,000 บาท

ในปีที่ 2 วรรัตน์ให้เงินบิดามารดาเดือนละ

$$2{,}000 + 2{,}000(0.05) = 2{,}000(1.05) \text{ บาท}$$

ในปีที่ 3 วรรัตน์ให้เงินบิดามารดาเดือนละ

$$2{,}000(1.05) + 2{,}000(1.05)(0.05) = 2{,}000(1.05)^2 \text{ บาท}$$

จะเห็นว่าจำนวนเงินในแต่ละเดือนที่วรรัตน์ให้บิดามารดาในปีที่ 1, 2, 3, …

เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 2{,}000$ และ $r = 1.05$

ดังนั้น จำนวนเงินในแต่ละเดือนที่วรรัตน์ให้บิดามารดาในปีที่ 7 คือ a_7

แทน n ด้วย 7 ใน $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_7 = 2{,}000(1.05)^{7-1}$

$\approx 2{,}680$

ดังนั้น ในปีที่ 7 วรรัตน์จะให้เงินบิดามารดาเดือนละประมาณ 2,680 บาท

2) ในปีแรก วรรัตน์ให้เงินบิดามารดาทั้งสิ้น $12(2{,}000)$ บาท

ในปีที่ 2 วรรัตน์ให้เงินบิดามารดาทั้งสิ้น $12(2{,}000)(1.05)$ บาท

ในปีที่ 3 วรรัตน์ให้เงินบิดามารดาทั้งสิ้น $12(2{,}000)(1.05)^2$ บาท

จะเห็นว่าจำนวนเงินที่วรรัตน์ให้บิดามารดาในปีที่ 1, 2, 3, … เป็นลำดับเรขาคณิต

ที่มี $a_1 = 12(2{,}000)$ และ $r = 1.05$

ดังนั้น จำนวนเงินที่วรรัตน์ให้บิดามารดาในปีที่ 1 ถึง 15 คือ S_{15}

แทน n ด้วย 15 ใน $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ $S_{15} = \dfrac{12(2{,}000)\left(1-(1.05)^{15}\right)}{1-1.05} = \dfrac{12(2{,}000)\left((1.05)^{15}-1\right)}{1.05-1} \approx 517{,}885.53$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 15 ปี วรรัตน์ให้เงินบิดามารดารวมแล้วเป็นเงินประมาณ 517,885.53 บาท ■

แบบฝึกหัด 1.3.2

1. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต เมื่อกำหนดให้
   1) $n=4, a_1=3$ และ $r=2$
   2) $n=7, a_1=5$ และ $r=4$
   3) $n=9, a_1=-3$ และ $r=5$
   4) $n=11, a_1=-7$ และ $r=3$
   5) $n=14, a_1=-5$ และ $r=-2$

2. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต เมื่อกำหนดให้
   1) $n=9$ และลำดับเรขาคณิต คือ $2, 6, 18, 54, \ldots$
   2) $n=8$ และลำดับเรขาคณิต คือ $9, 12, 16, \dfrac{64}{3}, \ldots$
   3) $n=10$ และลำดับเรขาคณิต คือ $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, \ldots$

3. จงหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตต่อไปนี้
   1) $9+27+81+\cdots+729$
   2) $4+2+1+\cdots+\dfrac{1}{512}$
   3) $1+(-2)+4+\cdots+256$

4. มังกรตั้งใจจะออมเงินเพื่อซื้อหนังสือ โดยวันแรกจะออมเงิน 1 บาท วันที่สอง 2 บาท วันที่สาม 4 บาท วันที่สี่ 8 บาท เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เมื่อครบ 15 วัน มังกรจะมีเงินออมทั้งหมดเท่าใด

5. ผู้จัดการฝ่ายขายของบริษัทแห่งหนึ่งตั้งใจจะเพิ่มยอดขายให้มากขึ้น 3% ของยอดขายเดิมทุกไตรมาส (ทุก 3 เดือน) ถ้าในไตรมาสแรกของปีที่ 1 เขาทำยอดขายได้ 300,000 บาท จงหาว่า
   1) เขาควรทำยอดขายไตรมาสแรกของปีที่ 3 ให้ได้เท่าใด
   2) เมื่อครบสองปี เขาควรทำยอดขายรวมทั้งหมดให้ได้เท่าใด

6. ถังใบหนึ่งมีน้ำอยู่ 5,832 ลิตร ถ้าใช้น้ำในถังทุกวัน โดยในแต่ละวันใช้น้ำ $\frac{1}{3}$ ของปริมาณน้ำที่มีอยู่ในถัง เมื่อครบ 6 วัน จะมีน้ำเหลืออยู่ในถังกี่ลิตร

7. บริษัทแห่งหนึ่งซื้อรถยนต์มาในราคา 1,000,000 บาท ถ้าในแต่ละปี รถยนต์มีมูลค่าลดลง 20% ซึ่งหมายถึงราคารถยนต์คันนี้จะลดลง 20% ทุกปี จงหาว่าเมื่อครบห้าปี รถยนต์คันนี้จะมีมูลค่าเท่าใด

8. ลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์แรก คือ 160 และอัตราส่วนร่วม คือ $\frac{3}{2}$ ถ้าผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ 2,110 จงหา n

9. ผลบวกของพจน์แรกและพจน์ที่สองของอนุกรมเรขาคณิต คือ -3 และผลบวกของพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 6 คือ $-\frac{3}{16}$ จงหาผลบวกของ 8 พจน์แรกของอนุกรมนี้

10. แบคทีเรียกลุ่มหนึ่งแบ่งเซลล์โดยมีจำนวนเพิ่มขึ้น 20% ในแต่ละชั่วโมง ถ้า ณ ปัจจุบันมีแบคทีเรีย 1,000 เซลล์ จงหาสูตรที่ใช้ในการหาจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง และเมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง จะมีแบคทีเรียทั้งหมดเท่าใด

1.3.3 อนุกรมอนันต์

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ จะเรียกการเขียนแสดงการบวกในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ ว่า **อนุกรมอนันต์ (infinite series)**

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม
เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม
$\vdots$
และเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม

ตัวอย่างของอนุกรมอนันต์

1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่ได้จากลำดับอนันต์ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots$

2) $4+8+12+\cdots+4n+\cdots$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่ได้จากลำดับอนันต์ $4, 8, 12, \ldots, 4n, \ldots$

3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ เป็นอนุกรมอนันต์ที่ได้จากลำดับอนันต์ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์โดยการบวกโดยตรงจนครบทุกพจน์เป็นไปไม่ได้ เพราะอนุกรมอนันต์มีจำนวนพจน์ไม่จำกัด

พิจารณาอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$
แม้ว่าจะไม่สามารถหาผลบวกของอนุกรมดังกล่าวโดยการบวกทีละพจน์จนครบทุกพจน์ได้ แต่สามารถหาผลบวก k พจน์แรกของอนุกรมอนันต์ดังกล่าวได้ เช่น

ผลบวก 2 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$

ผลบวก 3 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$

ผลบวก 4 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0.9375$

ผลบวก 5 พจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0.96875$

ผลบวก k พจน์แรกของอนุกรมนี้แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

k	ผลบวก k พจน์แรกของอนุกรม
5	0.96875
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

จากตารางข้างต้น พบว่า เมื่อ k มากขึ้น ผลบวก k พจน์แรกของอนุกรมจะเข้าใกล้ 1

บทนิยาม 6

กำหนด $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ เป็นอนุกรมอนันต์

ให้

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

เรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อย (partial sum)** n พจน์แรกของอนุกรม เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก เรียกลำดับอนันต์ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ ว่า **ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม (sequence of partial sums)**

จากตัวอย่างอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ จะได้

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\vdots$$

เนื่องจากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ $\frac{1}{2}$ และอัตราส่วนร่วม คือ $\frac{1}{2}$ จากสูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2^n-1}{2^n}$$

ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมอนันต์นี้ คือ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$
และเมื่อหาลิมิตของลำดับนี้ จะได้

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1$$

จากตัวอย่างอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ จะเห็นว่า 1 เป็นลิมิตของลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ จะกล่าวว่าอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ มีผลบวก และเรียก 1 ว่าเป็นผลบวกของอนุกรมนี้

พิจารณาอนุกรมอนันต์

1) $1+1+1+\cdots+1+\cdots$

2) $-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$

ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมในข้อ 1) คือ $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$

ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมในข้อ 2) คือ $-1, 0, -1, 0, -1, 0, \ldots$

จะเห็นว่าลำดับทั้งสองไม่มีลิมิต จึงกล่าวว่าอนุกรมอนันต์ทั้งสองไม่มีผลบวก

จากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้ว พบว่า อนุกรมอนันต์บางอนุกรมมีผลบวก แต่บางอนุกรมไม่มีผลบวก

จะนิยามผลบวกของอนุกรมอนันต์ ดังนี้

บทนิยาม 7

กำหนดอนุกรมอนันต์ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$
ให้ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้

ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่เข้า โดย $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ S เป็นจำนวนจริง แล้วจะกล่าวว่าอนุกรม $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ เป็น **อนุกรมลู่เข้า (convergent series)** และเรียก S ว่าผลบวกของอนุกรม

ถ้าลำดับ S_n เป็นลำดับลู่ออก จะกล่าวว่าอนุกรม $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ เป็น **อนุกรมลู่ออก (divergent series)**

จากบทนิยามข้างต้น การแสดงว่าอนุกรมอนันต์ใดจะเป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ทำได้ดังนี้

1) พิจารณาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม และหาสูตรทั่วไปของผลบวกย่อย n พจน์แรก (S_n) ของอนุกรม
2) พิจารณาลิมิตของ S_n ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ S เป็นจำนวนจริง แล้วอนุกรมนั้นเป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ S แต่ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ ไม่มีค่า แล้วอนุกรมนั้นเป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่างที่ 39

จงพิจารณาว่าอนุกรม $1+3+5+\cdots+(2n-1)+\cdots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$

ซึ่งมี $a_1 = 1$ และ $a_n = 2n-1$

หาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมจากสูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ได้ดังนี้

$$S_n = \frac{n}{2}(1+(2n-1))$$
$$= n^2$$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n^2$

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ $\lim_{n\to\infty} n^2$ ไม่มีค่า

ดังนั้น อนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่ออก ■

ตัวอย่างที่ 40

จงพิจารณาว่าอนุกรม $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1,000}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้ได้จากลำดับเรขาคณิต $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1,000}, \dots, \frac{3}{10^n}, \dots$

ซึ่งมี $a_1 = \frac{3}{10}$ และ $r = \frac{1}{10}$

หาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมจากสูตร $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$ ได้ดังนี้

$$S_n = \frac{\frac{3}{10}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

จากทฤษฎีบท 2 และ 3 จะได้ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3}$

ดังนั้น อนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{3}$ ■

อนุกรมบางอนุกรมไม่ใช่ทั้งอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต การหาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมดังกล่าวอาจทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 41

จงหาผลบวกย่อยสิบพจน์แรกของอนุกรม $1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+4\cdot 3^4+\cdots+n\cdot 3^n+\cdots$

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมที่กำหนดให้

จะได้ $S_n = 1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+4\cdot 3^4+\cdots+n\cdot 3^n$ --------- (1)

และ $3S_n = 1\cdot 3^2+2\cdot 3^3+3\cdot 3^4+4\cdot 3^5+\cdots+n\cdot 3^{n+1}$ --------- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$$-2S_n = 3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^n-n\cdot 3^{n+1}$$

จากสูตรการหาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$-2S_n = \frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot 3^{n+1}$$

$$-2S_n = \frac{3}{2}(3^n-1)-n\cdot 3^{n+1}$$

$$S_n = -\frac{3}{4}(3^n-1)+\frac{n}{2}\cdot 3^{n+1} \quad \text{--------- (3)}$$

แทน n ใน (3) ด้วย 10 จะได้

$$S_{10} = -\frac{3}{4}(3^{10}-1)+\frac{10}{2}(3^{11})$$

$$= -\frac{3^{11}}{4}+\frac{3}{4}+5(3^{11})$$

$$= \frac{3}{4}+\left(5-\frac{1}{4}\right)3^{11}$$

$$= \frac{3}{4}+\frac{19}{4}(3^{11})$$

ดังนั้น ผลบวกย่อยสิบพจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{3}{4}+\frac{19}{4}(3^{11})$ ■

ตัวอย่างที่ 42

จงหาผลบวกย่อยยี่สิบพจน์แรกของอนุกรม $1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{27}+4\cdot\frac{1}{81}+\cdots+n\cdot\frac{1}{3^n}+\cdots$

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมที่กำหนดให้

จะได้ $S_n = 1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{27}+4\cdot\frac{1}{81}+\cdots+n\cdot\frac{1}{3^n}$ ------- (1)

และ $\frac{1}{3}S_n = 1\cdot\frac{1}{3^2}+2\cdot\frac{1}{3^3}+3\cdot\frac{1}{3^4}+4\cdot\frac{1}{3^5}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{1}{3^n}+n\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$ ------- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\frac{2}{3}S_n = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^{n+1}}$$

จากสูตรการหาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$\frac{2}{3}S_n = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)-\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$S_n = \frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)-\frac{n}{2\cdot 3^n} \qquad \text{------- (3)}$$

แทน n ใน (3) ด้วย 20 จะได้

$$S_{20} = \frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right)-\frac{20}{2(3^{20})}$$

$$= \frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right)-\frac{10}{3^{20}}$$

$$= \frac{3}{4}-\frac{43}{4(3^{20})}$$

ดังนั้น ผลบวกย่อยยี่สิบพจน์แรกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{3}{4}-\frac{43}{4(3^{20})}$ ■

ตัวอย่างที่ 43

จงพิจารณาว่าอนุกรม $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)} &= \frac{k+1-k}{k(k+1)}\\ &= \frac{k+1}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}\\ &= \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} \qquad \text{---------} \ (1)\end{aligned}$$

จาก (1) เขียนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned}S_n &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 1 และ 3 จะได้

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

ดังนั้น อนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ 1 ■

ตัวอย่างที่ 44

จงพิจารณาว่าอนุกรม $1+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}+\cdots$
เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} &= \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{k-(k-1)} \\
&= \sqrt{k}-\sqrt{k-1} \qquad \text{---------} \quad (1)
\end{aligned}$$

จาก (1) เขียนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}\right)+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) \\
&= \sqrt{n}
\end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}$ ไม่มีค่า

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ไม่มีค่า

นั่นคือ อนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่ออก ■

สำหรับอนุกรมเรขาคณิตนั้น การจะพิจารณาว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก มีสมบัติเฉพาะที่ช่วยให้สามารถพิจารณาได้สะดวกขึ้น โดยมีข้อสังเกตดังนี้

จากอนุกรมเรขาคณิต $a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots+a_1r^{n-1}+\cdots$ เมื่อ $a_1\neq 0$

พิจารณากรณี $|r|=1$ จะได้ $r=1$ หรือ $r=-1$

ถ้า $r=1$ จะได้ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมเป็น $a_1, 2a_1, 3a_1, \ldots, na_1, \ldots$ ซึ่งไม่มีลิมิต เพราะ $\lim\limits_{n\to\infty} na_1$ ไม่มีค่า

ถ้า $r=-1$ จะได้ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมเป็นลำดับแกว่งกวัด $a_1, 0, a_1, 0, \ldots$ ซึ่งไม่มีลิมิต

ดังนั้น อนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $|r|=1$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ต่อไปพิจารณากรณี $|r|\neq 1$

จะได้

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r} \\ &= \frac{a_1}{1-r}-\frac{a_1r^n}{1-r} \end{aligned}$$

ถ้า $|r|<1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$ ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1r^n}{1-r}=0$

จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{1-r}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_1r^n}{1-r} \\ &= \frac{a_1}{1-r} \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $|r|<1$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{a_1}{1-r}$

ถ้า $|r|>1$ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ ไม่มีค่า ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1-r}-\frac{a_1r^n}{1-r}\right)$ ไม่มีค่า

ดังนั้น อนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $|r|>1$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6

กำหนดให้อนุกรมเรขาคณิตมี a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วม

ถ้า $|r|<1$ แล้ว อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าและผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{a_1}{1-r}$

ถ้า $|r|\geq 1$ แล้ว อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่างที่ 45

จงพิจารณาว่าอนุกรม $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\cdots+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=1$ และ $r=-\frac{2}{3}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{2}{3}<1$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3}{5}$ ■

ตัวอย่างที่ 46

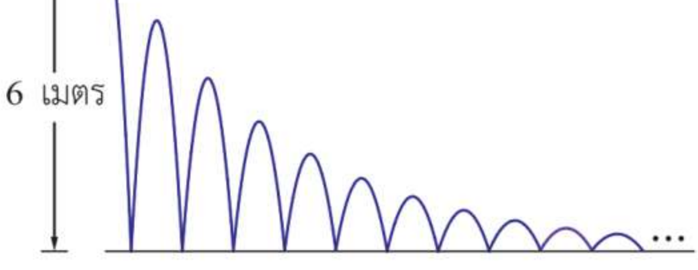
จงพิจารณาว่าอนุกรม $\frac{2}{3}+\frac{8}{9}+\frac{32}{27}+\frac{128}{81}+\cdots+\frac{2^{2n-1}}{3^n}+\cdots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1=\frac{2}{3}$ และ $r=\frac{4}{3}$

เนื่องจาก $|r|=\frac{4}{3}>1$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก ■

ตัวอย่างที่ 47

ถ้าปล่อยลูกบอลจากความสูง 6 เมตร แล้วลูกบอลกระดอนขึ้นมา 75% ของความสูงเดิมในแต่ละครั้ง จงหาระยะเคลื่อนที่ทั้งหมดในแนวตั้งของลูกบอล



วิธีทำ ระยะเคลื่อนที่ในแนวตั้งของลูกบอลเมื่อเริ่มปล่อยลูกบอลถึงพื้นดินมีระยะทาง 6 เมตร ลูกบอลกระดอนขึ้นมา 75% ของความสูงเดิม นั่นคือ ระยะเคลื่อนที่ขึ้นในแนวตั้งเมื่อลูกบอลกระดอนครั้งที่ 1 เท่ากับ $\frac{3}{4}$ ของความสูงเดิม

ดังนั้น ระยะเคลื่อนที่ในแนวตั้งของลูกบอลเมื่อกระดอนขึ้นครั้งที่ 1 จนตกถึงพื้นดิน คือ

$$6\left(\frac{3}{4}\right)+6\left(\frac{3}{4}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)$$

ระยะเคลื่อนที่ในแนวตั้งของลูกบอลเมื่อกระดอนขึ้นครั้งที่ 2 จนตกถึงพื้นดิน คือ

$$6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

ระยะเคลื่อนที่ในแนวตั้งของลูกบอลเมื่อกระดอนขึ้นครั้งต่อไปเป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้ระยะเคลื่อนที่ทั้งหมดในแนวตั้งของลูกบอลเท่ากับ

$$6+12\left(\frac{3}{4}\right)+12\left(\frac{3}{4}\right)^2+12\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots$$

จากทฤษฎีบท 6 จะได้

$$\begin{aligned}6+12\left(\frac{3}{4}\right)+12\left(\frac{3}{4}\right)^2+12\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots &= 6+12\left(\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots\right)\\ &= 6+12\left(\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right)\\ &= 6+36\\ &= 42\end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะเคลื่อนที่ทั้งหมดในแนวตั้งของลูกบอล คือ 42 เมตร ■

ตัวอย่างที่ 48

จงเขียนทศนิยมซ้ำ $5.4\dot{2}\dot{7}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

วิธีทำ จาก $5.4\dot{2}\dot{7} = 5.4272727\ldots$

$$= 5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots$$

จากทฤษฎีบท 6 จะได้

$$\begin{aligned} & 5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots \\ &= 5.4 + \frac{27}{10^3} + \frac{27}{10^5} + \frac{27}{10^7} + \cdots \\ &= 5.4 + 27\left(\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \left(\frac{1}{10}\right)^7 + \cdots\right) \\ &= 5.4 + 27\left(\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{1 - \frac{1}{100}}\right) \\ &= 5.4 + 27\left(\frac{1}{990}\right) \\ &= \frac{54}{10} + \frac{3}{110} \\ &= \frac{597}{110} \end{aligned}$$

ดังนั้น เขียนทศนิยมซ้ำ $5.4\dot{2}\dot{7}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้เป็น $\frac{597}{110}$ ■

แบบฝึกหัด 1.3.3

1. จงหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมต่อไปนี้

   1) $3+2+\frac{4}{3}+\cdots+3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots$

   2) $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+\frac{25}{2}+\cdots+\frac{1}{2}(5)^{n-1}+\cdots$

   3) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}+\cdots$

   4) $2+(-1)+(-4)+\cdots+(5-3n)+\cdots$

   5) $\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\cdots$

   6) $-\frac{1}{10}+\frac{1}{100}-\frac{1}{1,000}+\cdots+\left(\frac{-1}{10}\right)^{n}+\cdots$

   7) $100+10+1+0.1+\cdots+10^{3-n}+\cdots$

   8) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{0}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}+\cdots$

2. จงพิจารณาว่าอนุกรมในข้อ 1 อนุกรมใดบ้างที่เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกของอนุกรมเป็นเท่าใด

3. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

   1) $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{3}{2^{n-1}}+\cdots$

   2) $\frac{4+1}{9}+\frac{8+1}{27}+\frac{16+1}{81}+\cdots+\frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}}+\cdots$

   3) $\frac{1}{2+x^2}+\frac{1}{(2+x^2)^2}+\frac{1}{(2+x^2)^3}+\cdots+\frac{1}{(2+x^2)^n}+\cdots$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

4. จงแสดงว่า $0.\dot{9}=1$

5. จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

   1) $0.\dot{2}\dot{1}$

   2) $0.6\dot{1}0\dot{4}$

   3) $7.2\dot{5}\dot{6}$

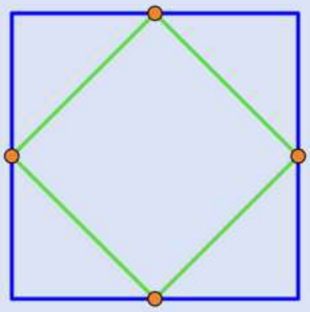
   4) $4.3\dot{8}\dot{7}$

   5) $0.0737373\ldots$

   6) $2.999\ldots$

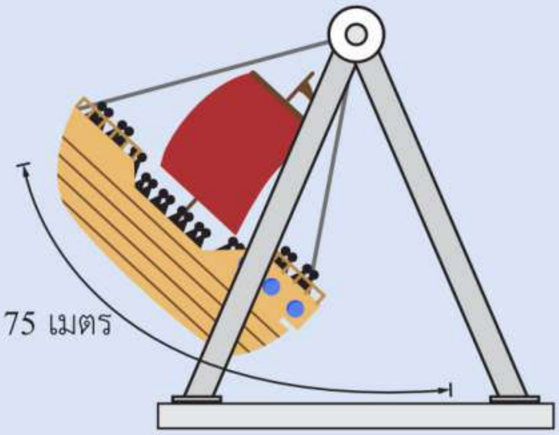
6. จงหาคำตอบของสมการ $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{2}{3}$

7. ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังรูป



1) ถ้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่มีเส้นรอบรูปยาว 20 หน่วย แล้วรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กมีเส้นรอบรูปยาวเท่าใด
2) ถ้ากระบวนการเกิดรูปใหม่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องไม่สิ้นสุด แล้วผลบวกของความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมดเป็นเท่าใด

8. เรือไวกิ้งเป็นเครื่องเล่นชนิดหนึ่งในสวนสนุก ถ้าในการแกว่งครั้งแรก วัดระยะทางของหัวเรือไวกิ้งเมื่อแกว่งจากตำแหน่งซ้ายสุดไปถึงขวาสุดได้ 75 เมตร และการแกว่งครั้งต่อไปมีระยะสั้นลงเป็น $\frac{3}{5}$ ของระยะเดิม จงหาว่าหากไม่มีการหยุดกะทันหัน เรือไวกิ้งจะแกว่งไปมาตั้งแต่เริ่มต้นเป็นระยะทางทั้งหมดเท่าใด



9. จงพิจารณาว่าวิธีการหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่ ถ้าไม่ถูกต้อง จงให้เหตุผล

1) ให้ $x = 1+2+4+8+16+32+\cdots$

จะได้ $2x = 2+4+8+16+32+64+\cdots$

$= (1+2+4+8+16+32+64+\cdots)-1$

$= x-1$

ดังนั้น $x = -1$

นั่นคือ ผลบวกของอนุกรม $1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}+\cdots$ เท่ากับ -1

2) ให้ $S = 1-2+4-8+16-32+64-\cdots$ ---------- (1)

และ $2S = 2-4+8-16+32-64+\cdots$ ---------- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $3S=1$ นั่นคือ $S=\frac{1}{3}$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรม $1-2+4-8+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots$ เท่ากับ $\frac{1}{3}$

1.4 สัญลักษณ์แสดงการบวก

เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรมจะใช้ตัวอักษรกรีกตัวพิมพ์ใหญ่ $\sum$ (อ่านว่า ซิกมา) เป็นสัญลักษณ์แสดงการบวก กล่าวคือ จะเขียนแทนอนุกรมจำกัด $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ ด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (อ่านว่า ซัมเมชัน a_i เมื่อ i เท่ากับ 1 ถึง n) และเขียนแทนอนุกรมอนันต์ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ ด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (อ่านว่า ซัมเมชัน a_i เมื่อ i เท่ากับ 1 ถึง ∞)

เรียกตัวแปร i ที่ปรากฏในสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{n} a_i$ หรือ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ว่า **ดัชนี (index)** ซึ่งอาจจะใช้ตัวแปรอื่นแทน i ได้

1) $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

2) $\sum_{k=1}^{4} (2k-1) = (2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$

4) $\sum_{i=1}^{\infty} (i+3) = (1+3)+(2+3)+(3+3)+\cdots+(n+3)+\cdots$

5) $\sum_{i=1}^{\infty} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+\cdots$

นอกจากนี้ การใช้สัญลักษณ์ $\sum$ แทนการบวก อาจเขียนได้หลายรูปแบบ เช่น $\sum_{i=1}^{4}(i-1)i$ และ $\sum_{i=0}^{3} i(i+1)$ ต่างก็แทนอนุกรม $0+2+6+12$ เช่นเดียวกัน จะเห็นว่าดัชนีไม่จำเป็นต้องเริ่มจาก 1 เสมอไป

ตัวอย่างที่ 49

จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^{10} 3 = 30$

วิธีทำ $\sum_{i=1}^{10} 3 = \underbrace{3+3+3+\cdots+3}_{10 \text{ ตัว}} = 30$ ■

ตัวอย่างที่ 50

จงหา $\sum_{i=1}^{4}\left(i^2 - i + 1\right)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\left(i^2 - i + 1\right) &= \left(1^2-1+1\right)+\left(2^2-2+1\right)+\left(3^2-3+1\right)+\left(4^2-4+1\right)\\ &= 1+3+7+13\\ &= 24\end{aligned}$$ ■

ตัวอย่างที่ 51

ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงเขียน $2x+4x^2+6x^3+8x^4+10x^5$ โดยใช้สัญลักษณ์ $\sum$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}2x+4x^2+6x^3+8x^4+10x^5 &= 2\cdot 1x^1+2\cdot 2x^2+2\cdot 3x^3+2\cdot 4x^4+2\cdot 5x^5\\ &= \sum_{i=1}^{5} 2ix^i\end{aligned}$$ ■

ตัวอย่างที่ 52

จงหา $\sum_{i=1}^{5} i^2$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} i^2 &= 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\\ &= 1+4+9+16+25\\ &= 55\end{aligned}$$ ■

ตัวอย่างที่ 53

จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^{10} 2i^2 = 2\sum_{i=1}^{10} i^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10} 2i^2 &= 2\cdot 1^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \cdots + 2\cdot 10^2 \\ &= 2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2\right) \\ &= 2\sum_{i=1}^{10} i^2\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 54

จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^{10}(i+3) = \sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} 3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}(i+3) &= (1+3)+(2+3)+(3+3)+\cdots+(10+3) \\ &= (1+2+3+\cdots+10) + \underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{10\text{ ตัว}} \\ &= \sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} 3\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 53 และ 54 สอดคล้องกับทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
4. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

การคำนวณหา $\sum_{i=1}^{5} i^2$ โดยการบวกโดยตรงดังตัวอย่างที่ 52 ทำได้ง่าย เนื่องจากมีจำนวนพจน์น้อย แต่ในกรณีที่มีจำนวนพจน์มาก เช่น $\sum_{i=1}^{100} i^2$ อาจต้องใช้เครื่องคำนวณช่วย เพราะการบวกโดยตรงต้องใช้เวลามาก

ต่อไปนี้จะเป็นการหาสูตรผลบวกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n} i, \sum_{i=1}^{n} i^2$ และ $\sum_{i=1}^{n} i^3$ ซึ่งสูตรที่ได้จะช่วยให้การหาผลบวกของอนุกรมบางอนุกรมง่ายขึ้น

สูตรผลบวกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n} i$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

เนื่องจาก $1+2+3+\cdots+(n-1)+n$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

สูตรผลบวกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n} i^2$

พิจารณา $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$

เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
n^3 - (n-1)^3 &= 3n^2 - 3n + 1 && \text{------- (1)} \\
(n-1)^3 - (n-2)^3 &= 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 && \text{------- (2)} \\
(n-2)^3 - (n-3)^3 &= 3(n-2)^2 - 3(n-2) + 1 && \text{------- (3)} \\
&\vdots \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 && \text{------- } (n-2) \\
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 && \text{------- } (n-1) \\
1^3 - 0^3 &= 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 && \text{------- } (n)
\end{aligned}
$$

จาก (1), (2), (3), … , (n) จะได้

$$
\begin{aligned}
n^3 &= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3}{2}n(n+1) - n\right) \\
&= \frac{n}{3}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{2}\right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

สูตรผลบวกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n} i^3$

พิจารณา $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
n^4-(n-1)^4 &= 4n^3-6n^2+4n-1 && \text{------- (1)}\\
(n-1)^4-(n-2)^4 &= 4(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1 && \text{------- (2)}\\
(n-2)^4-(n-3)^4 &= 4(n-2)^3-6(n-2)^2+4(n-2)-1 && \text{------- (3)}\\
&\vdots\\
3^4-2^4 &= 4\cdot 3^3-6\cdot 3^2+4\cdot 3-1 && \text{------- } (n-2)\\
2^4-1^4 &= 4\cdot 2^3-6\cdot 2^2+4\cdot 2-1 && \text{------- } (n-1)\\
1^4-0^4 &= 4\cdot 1^3-6\cdot 1^2+4\cdot 1-1 && \text{------- } (n)
\end{aligned}
$$

จาก (1), (2), (3), … , (n) จะได้

$$
\begin{aligned}
n^4 &= 4\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)-6\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+4\left(1+2+3+\cdots+n\right)-n\\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i^3-6\sum_{i=1}^{n} i^2+4\sum_{i=1}^{n} i-n
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \frac{1}{4}\left(n^4+6\sum_{i=1}^{n} i^2-4\sum_{i=1}^{n} i+n\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(n^4+6\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)-4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+n\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(n^4+n\left(2n^2+3n+1-2n-2+1\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(n^4+n\left(2n^2+n\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(n^4+2n^3+n^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(n^2+n\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\left(n(n+1)\right)^2
\end{aligned}
$$

จะได้ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}\left(n(n+1)\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 8

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

ตัวอย่างที่ 55

ถ้า $1+2+3+4+\cdots+n=153$ จงหา n

วิธีทำ เนื่องจาก $1+2+3+4+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= 153 \\ n^2+n-306 &= 0 \\ (n-17)(n+18) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $n=17$ หรือ $n=-18$

แต่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น n คือ 17 ■

ตัวอย่างที่ 56

จงแสดงว่าผลบวกของจำนวนคี่บวก n ตัวแรกเท่ากับ n^2

วิธีทำ ผลบวกของจำนวนคี่บวก n ตัวแรกเขียนแทนได้ด้วยอนุกรม $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}2k - \sum_{k=1}^{n}1 \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}k - n \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n \\
&= n(n+1) - n \\
&= n^2 + n - n \\
&= n^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคี่บวก n ตัวแรกเท่ากับ n^2 ■

ตัวอย่างที่ 57

จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n}(2i+5)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n}(2i+5)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(4i^2 + 20i + 25\right) \\
&= 4\sum_{i=1}^{n}i^2 + 20\sum_{i=1}^{n}i + \sum_{i=1}^{n}25 \\
&= 4\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 20\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 25n
\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} S_{20} &= 4\left(\frac{20(20+1)(2(20)+1)}{6}\right)+20\left(\frac{20(20+1)}{2}\right)+25(20) \\ &= 11,480+4,200+500 \\ &= 16,180 \end{aligned}$$

นั่นคือ ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n}(2i+5)^2$ เท่ากับ 16,180 ■

ตัวอย่างที่ 58

จงหาผลบวกของอนุกรม $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\cdots+(2n-1)\cdot 2n$

วิธีทำ ให้ S_n แทน $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\cdots+(2n-1)\cdot 2n$

จะได้
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1)(2i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(4i^2-2i\right) \\ &= 4\sum_{i=1}^{n}i^2-2\sum_{i=1}^{n}i \\ &= 4\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)-2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= n(n+1)\left(\frac{2}{3}(2n+1)-1\right) \\ &= n(n+1)\left(\frac{4n+2-3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(4n-1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\cdots+(2n-1)\cdot 2n=\frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$ ■

ตัวอย่างที่ 59

จงหาผลบวกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n}\left(i^3 - i + 1\right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(i^3 - i + 1\right) &= \sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} - \frac{n^2 + n}{2} + n \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 - n^2 + 2n}{4} \\
&= \frac{n}{4}\left(n^3 + 2n^2 - n + 2\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n}\left(i^3 - i + 1\right) = \frac{n}{4}\left(n^3 + 2n^2 - n + 2\right)$ ■

ตัวอย่างที่ 60

จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{(4i-3)(4i+1)}$

วิธีทำ ให้ $S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{(4i-3)(4i+1)}$

เนื่องจาก $\frac{4}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{4i+1-4i+3}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{1}{4i-3} - \frac{1}{4i+1}$ สำหรับทุกจำนวนนับ i

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{4i-3} - \frac{1}{4i+1}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{4n+1}
\end{aligned}$$

จะได้ $$S_{20} = 1 - \frac{1}{4(20)+1} = \frac{80}{81}$$

ดังนั้น ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{(4i-3)(4i+1)}$ คือ $\frac{80}{81}$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงเขียนแทนสัญลักษณ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปการบวก

1) $\sum_{i=1}^{4} 2i$
2) $\sum_{i=4}^{6} (3i-2)$
3) $\sum_{i=2}^{7} (2-i)$
4) $\sum_{i=1}^{52} (i+2)$
5) $\sum_{k=1}^{4} (10-2k)$
6) $\sum_{i=1}^{20} (i^2+4)$

2. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

1) $\sum_{j=1}^{5} 3j$
2) $\sum_{k=1}^{50} 8$
3) $\sum_{i=1}^{4} i^2(i-3)$
4) $\sum_{k=2}^{6} \frac{k+4}{k-1}$
5) $\sum_{k=1}^{5} (k^2+3)$
6) $\sum_{i=1}^{15} (i+5)$
7) $\sum_{i=10}^{20} (2i+1)$
8) $\sum_{k=1}^{15} (k+5)(k-5)$
9) $\sum_{j=1}^{20} j^2(2j-3)$
10) $\sum_{i=1}^{10} (i-2)^3$

3. จงเขียนอนุกรมต่อไปนี้โดยใช้สัญลักษณ์ $\sum$
   1) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)+\cdots$
   2) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}$
   3) $2+4+6+\cdots+2n$
   4) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(3)(2^{n-1})}+\cdots$
   5) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}+\cdots$

4. จงแสดงว่า
   1) $\sum_{i=1}^{n} 6i = 3n(n+1)$
   2) $\sum_{i=1}^{k} (2i+1) = k^2+2k$
   3) $\sum_{i=1}^{m} 3\cdot 4^i = 4^{m+1}-4$
   4) $\sum_{i=1}^{n} (i^2-i) = \frac{n^3-n}{3}$

5. จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้
   1) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)+\cdots$
   2) $1\cdot 4\cdot 7+2\cdot 5\cdot 8+3\cdot 6\cdot 9+4\cdot 7\cdot 10+\cdots+n(n+3)(n+6)+\cdots$
   3) $1(2+3)+4(4+3)+9(6+3)+16(8+3)+\cdots+n^2(2n+3)+\cdots$
   4) $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots+(2n-1)^2+\cdots$
   5) $1\left(1+\frac{1}{1}\right)+2\left(1+\frac{1}{2}\right)+3\left(1+\frac{1}{3}\right)+4\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots$

6. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้
   1) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5\cdot 6+\cdots+10\cdot 11\cdot 12$
   2) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\cdots+99\cdot 100$

7. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3

8. จงหาผลบวก n พจน์แรก และผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้

1) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$

2) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$

3) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}$

4) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+2)}$

9. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้

1) $0+3+8+\cdots+(n^2-1)+\cdots$

2) $-1+0+9+\cdots+(n^3-2n^2)+\cdots$

10. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

1) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(n-1)}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{100^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n}$

11. ถ้าพจน์ที่ n ของอนุกรม คือ $2n-5$ จงหาผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมนี้

12. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 9 และ 199

1) เมื่อจำนวนดังกล่าวหารด้วย 8 ลงตัว

2) เมื่อจำนวนดังกล่าวหารด้วย 8 ไม่ลงตัว

1.5 การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม

ในหัวข้อนี้เป็นการนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ดังนี้

ดอกเบี้ยทบต้น

การคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นเป็นกลไกที่นำดอกเบี้ยที่ได้รับทบเข้าไปกับเงินต้น ทำให้เงินต้นใหม่มียอดสูงขึ้น ดังนั้น เมื่อคิดดอกเบี้ยรอบใหม่ ดอกเบี้ยก็จะสูงขึ้น และเมื่อทบเข้าไปกับเงินต้นใหม่จะทำให้มีมูลค่าเงินสูงขึ้นเรื่อย ๆ โดยทั่วไปสถาบันการเงินจะแจ้งให้ทราบว่าจะคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นเมื่อสิ้นสุดระยะเวลาแต่ละงวดเท่าใด เช่น คำนวณดอกเบี้ยทุก 3 เดือน ทุก 6 เดือน หรือทุกปี เมื่อนำดอกเบี้ยที่คำนวณได้ไปรวมกับเงินต้น จะเรียกผลรวมนี้ว่าเงินรวม ซึ่งจะเป็นเงินต้นของการคำนวณดอกเบี้ยในงวดถัดไป ทำเช่นเดียวกันนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะครบระยะเวลาที่ลงทุน

ตัวอย่างที่ 61

ฝากเงิน 10,000 บาท กับธนาคารซึ่งให้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหา
1) เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 1 ปี
2) เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี

วิธีทำ 1) เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 1 ปี หาได้จาก จำนวนเงินต้นรวมกับดอกเบี้ยของเงินต้น
ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 1 ปี คือ $10{,}000+10{,}000(0.03) = 10{,}300$ บาท

2) เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี หาได้จาก เงินรวมของปีแรกรวมกับดอกเบี้ยที่ได้รับในปีที่สอง
ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี คือ $10{,}300+10{,}300(0.03) = 10{,}609$ บาท

■

ในกรณีทั่วไป ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท และอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี เมื่อกำหนดให้ $r = \frac{i}{100}$ จะสามารถหาจำนวนเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ n ได้ดังนี้

- เมื่อสิ้นปีที่ 1 ได้รับดอกเบี้ย Pr บาท รวมกับเงินต้น P บาท
  จะได้ เงินรวม $P+Pr = P(1+r)$ บาท ซึ่งเงินจำนวนนี้จะเป็นเงินต้นของปีถัดไป

- เมื่อสิ้นปีที่ 2 ได้รับดอกเบี้ย $P(1+r)\cdot r$ บาท รวมกับเงินต้น $P(1+r)$ บาท

  จะได้ เงินรวม $P(1+r)+P(1+r)\cdot r = P(1+r)(1+r) = P(1+r)^2$ บาท

ในทำนองเดียวกัน

- เมื่อสิ้นปีที่ 3 จะได้ เงินรวม $P(1+r)^3$ บาท

  ⋮

- เมื่อสิ้นปีที่ n จะได้ เงินรวม $P(1+r)^n$ บาท

ซึ่งสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 9

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี (ปีละครั้ง) แล้วเมื่อสิ้นปีที่ n จะได้ เงินรวม $P(1+r)^n$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

เมื่อพิจารณาลำดับของเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 1 ถึง n จะเห็นว่า $P(1+r), P(1+r)^2, \ldots, P(1+r)^n$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ $P(1+r)$ และอัตราส่วนร่วม คือ $1+r$

ในกรณีที่มีการคิดดอกเบี้ยทบต้นมากกว่าปีละครั้ง เช่น ธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นสำหรับเงินฝากในบัญชีออมทรัพย์ทุก 6 เดือน จะสามารถคำนวณเงินรวมได้จาก $P(1+r)^n$ เมื่อ P แทนเงินต้น n แทนจำนวนงวด และ r แทนอัตราดอกเบี้ยที่คิดแบบทบต้นต่องวด

ในทางปฏิบัติอัตราดอกเบี้ยที่ระบุจะเป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปี ดังนั้น ในการคำนวณจะต้องแปลงให้เป็นอัตราดอกเบี้ยต่องวดเสียก่อน เช่น อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดทบต้นทุก 3 เดือน แสดงว่าใน 1 ปี จะคิดดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้ง จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6\%}{4} = 1.5\%$ หรือ 0.015

ตัวอย่างที่ 62

ฝากเงิน 50,000 บาท กับสถาบันการเงินที่ให้อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสามเดือน เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี จะมีเงินรวมเท่าใด โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6\%}{4} = 1.5\%$ หรือ 0.015

จำนวนงวดทั้งหมดเท่ากับ $5(4) = 20$ งวด

ให้ a_i แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ i

จะได้

$$\begin{aligned}
a_1 &= 50{,}000 + 50{,}000(0.015) &&= 50{,}000(1.015) \\
a_2 &= a_1 + a_1(0.015) = a_1(1.015) &&= 50{,}000(1.015)^2 \\
a_3 &= a_2 + a_2(0.015) = a_2(1.015) &&= 50{,}000(1.015)^3 \\
&\vdots \\
a_{20} &= a_{19} + a_{19}(0.015) = a_{19}(1.015) &&= 50{,}000(1.015)^{20}
\end{aligned}$$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 5 ปี คือ $50{,}000(1.015)^{20}$ หรือประมาณ 67,342.75 บาท

■

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 62 จะเห็นว่า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น 1.015

สามารถสรุปวิธีหาเงินรวมที่ได้จากการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 10

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี จะได้ เงินรวม $P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

ตัวอย่างที่ 63

ฝากเงิน 10,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งที่ให้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละครั้ง จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ ในที่นี้ $P = 10,000,\ k = 1,\ n = 10$ และ $r = 0.03$

จากทฤษฎีบท 10 จำนวนเงินรวม คือ $10,000(1+0.03)^{10}$ หรือประมาณ 13,439.16 บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 10 ปี จะมีเงินรวมประมาณ 13,439.16 บาท ■

ตัวอย่างที่ 64

ฝากเงิน 10,000 บาท กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งที่ให้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ ในที่นี้ $P = 10,000,\ k = 2,\ n = 10$ และ $r = 0.03$

จากทฤษฎีบท 10 จำนวนเงินรวม คือ $10,000\left(1+\frac{0.03}{2}\right)^{20}$ หรือประมาณ 13,468.55 บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 10 ปี จะมีเงินรวมประมาณ 13,468.55 บาท ■

ตัวอย่างที่ 65

ฝากเงิน 10,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่ง โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน เมื่อสิ้นปีที่ 3 ธนาคารแจ้งว่ามีเงินในบัญชีประมาณ 10,938 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปีที่ธนาคารกำหนด

วิธีทำ ในที่นี้ $P = 10,000,\ k = 4$ และ $n = 3$

จากทฤษฎีบท 10 จะได้

$$
\begin{aligned}
10,000\left(1+\frac{r}{4}\right)^{12} &= 10,938 \\
\left(1+\frac{r}{4}\right)^{12} &= 1.0938 \\
1+\frac{r}{4} &= \sqrt[12]{1.0938} \\
r &= 4\left(\sqrt[12]{1.0938}-1\right) \\
&\approx 0.029998
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยสำหรับเงินฝากนี้ประมาณ 3% ต่อปี ■

มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

สมมติว่าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 1,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละครั้ง เมื่อฝากครบ 2 ปี จะได้เงินรวม $1,000(1+0.05)^2$ หรือ 1,102.5 บาท ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเงิน 1,102.5 บาท เป็นมูลค่าอนาคต ส่วนเงิน 1,000 บาท เป็นมูลค่าปัจจุบัน

ถ้าลงทุน P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง เป็นเวลา n ปี กำหนดให้ $r=\frac{i}{100}$ แล้วเมื่อครบ n ปี เงินรวมที่ได้ คือ

$$S=P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}$$

เรียก S ว่า มูลค่าอนาคตของเงินต้น P

ในทางกลับกัน จะเรียก P ว่า มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบัน P ของเงินรวม S คือ

$$P=S\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kn}$$

ตัวอย่างที่ 66

สายชลต้องการฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน ถ้าสายชลต้องการให้มีเงินในบัญชีประมาณ 10,000 บาท เมื่อสิ้นสุดปีที่ 3 เขาต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยเท่าใด

วิธีทำ ในที่นี้ $S = 10{,}000,\ k = 12,\ n = 3$ และ $r = 0.05$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม 10,000 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= 10{,}000\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{-36} \\ &\approx 8{,}609.76 \end{aligned}$$

ดังนั้น สายชลควรนำเงินไปฝากอย่างน้อย 8,609.76 บาท ■

จากตัวอย่างที่ 66 จะกล่าวว่า 8,609.76 บาท เป็นมูลค่าปัจจุบันของเงิน 10,000 บาท

ตัวอย่างที่ 67

ดำรงได้รับมรดกเป็นเงิน 94,349.42 บาท จากคุณพ่อซึ่งฝากเงินจำนวนหนึ่งไว้กับธนาคารเมื่อ 15 ปีที่แล้ว โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้ ถ้าธนาคารคงอัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาเงินต้นที่คุณพ่อของดำรงฝากไว้เมื่อ 15 ปีก่อน

วิธีทำ ในที่นี้ $S = 94{,}349.42,\ k = 2,\ n = 15$ และ $r = 0.02$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม 94,349.42 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= 94{,}349.42\left(1+\frac{0.02}{2}\right)^{-30} \\ &\approx 70{,}000 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อ 15 ปีก่อน คุณพ่อของดำรงฝากเงินต้นไว้ประมาณ 70,000 บาท ■

ตัวอย่างที่ 68

วารีกู้เงินจากณัชชา โดยมีกำหนดชำระหนี้ทั้งหมดในอีก 2 ปีข้างหน้า เป็นเงิน 46,656 บาท ถ้าณัชชากำหนดอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหาจำนวนเงินที่วารีกู้จากณัชชา

วิธีทำ ให้ P เป็นมูลค่าของหนี้ปัจจุบัน

ในที่นี้ $S = 46,656,\ k = 1,\ n = 2$ และ $r = 0.08$

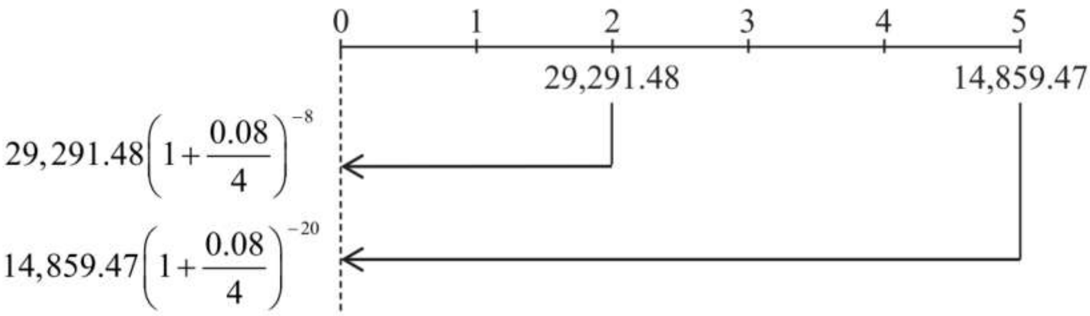
จะได้
$$P = 46,656(1+0.08)^{-2}$$
$$= 40,000$$

ดังนั้น วารีกู้เงินจากณัชชา 40,000 บาท ■

ตัวอย่างที่ 69

ปยุตกู้เงินจากวายุจำนวน 2 ยอด โดยยอดแรกต้องชำระ 29,291.48 บาท ในอีก 2 ปีข้างหน้า ส่วนยอดที่ 2 ต้องชำระ 14,859.47 บาท ในอีก 5 ปีข้างหน้า ถ้าวายุกำหนดอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาจำนวนเงินทั้งหมดที่ปยุตกู้จากวายุ

วิธีทำ เนื่องจากปยุตกู้เงินจากวายุจำนวน 2 ยอด ดังนั้น จะต้องหามูลค่าปัจจุบันของเงินแต่ละยอด แล้วจึงนำมารวมกัน



ยอดที่ 1 ในที่นี้ $S = 29,291.48,\ k = 4,\ n = 2$ และ $r = 0.08$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงิน 29,291.48 บาท คือ $29,291.48\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{-8}$

หรือประมาณ 25,000 บาท

ยอดที่ 2 ในที่นี้ $S = 14,859.47, k = 4, n = 5$ และ $r = 0.08$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงิน 14,859.47 บาท คือ $14,859.47\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{-20}$

หรือประมาณ 10,000 บาท

ดังนั้น ปยุตกู้เงินจากวายุทั้งหมดประมาณ $25,000+10,000 = 35,000$ บาท ■

ตัวอย่างที่ 70

ทุกวันที่ 1 มกราคม น้ำหวานจะฝากเงิน 1,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารที่ให้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี น้ำหวานจะได้เงินรวมเท่าใด

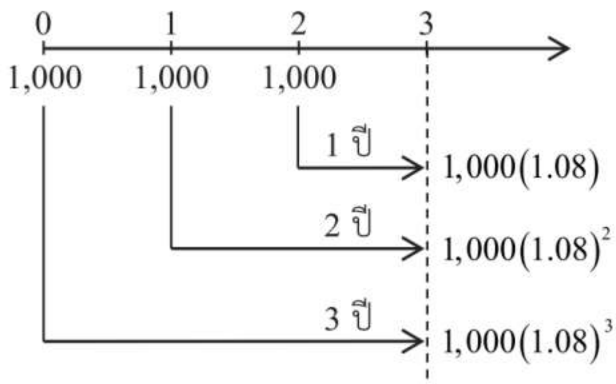
1) เมื่อสิ้นปีที่ 3
2) เมื่อสิ้นปีที่ 10

วิธีทำ 1) เมื่อสิ้นปีที่ 3

เงินฝากงวดแรกจะมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $1,000(1.08)^3$ บาท

เงินฝากงวดที่สองจะมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $1,000(1.08)^2$ บาท

เงินฝากงวดที่สามจะมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $1,000(1.08)$ บาท



ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 3 น้ำหวานจะได้เงินรวม $1,000(1.08)+1,000(1.08)^2+1,000(1.08)^3$ หรือประมาณ 3,506.11 บาท

2) เมื่อสิ้นปีที่ 10 เงินรวมของน้ำหวานคือ $1,000(1.08)+1,000(1.08)^2+\cdots+1,000(1.08)^{10}$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 10 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $1,000(1.08)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.08

จะได้ เงินรวม คือ $\frac{1,000(1.08)\left((1.08)^{10}-1\right)}{1.08-1}$ หรือประมาณ 15,645.49 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 10 น้ำหวานจะได้เงินรวมประมาณ 15,645.49 บาท ■

ตัวอย่างข้างต้นเป็นการแสดงวิธีหาเงินรวมจากการฝากเงินเป็นงวด ๆ จะเห็นว่าเมื่อจำนวนงวดมาก ๆ สามารถนำอนุกรมเรขาคณิตมาช่วยในการคำนวณได้ ซึ่งจะได้ศึกษารายละเอียดในหัวข้อต่อไป

ค่างวด

ในชีวิตประจำวัน นักเรียนคงได้พบเห็นการรับหรือจ่ายเงินเป็นงวด ๆ เช่น การฝากเงินในธนาคารเป็นประจำทุกเดือน การซื้อของแบบผ่อนส่ง การจ่ายค่าเช่าบ้านรายเดือน การจ่ายเบี้ยประกันรายปี การรับเงินเดือนทุกเดือน ซึ่งจะเรียกการรับหรือจ่ายเงินลักษณะนี้ว่า การรับหรือจ่ายค่างวด

การรับหรือจ่ายค่างวด มีลักษณะ 3 ประการ ดังนี้

1. รับหรือจ่ายเท่ากันทุกงวด
2. รับหรือจ่ายติดต่อกันทุกงวด
3. รับหรือจ่ายตอนต้นงวดหรือสิ้นงวด

ตัวอย่างการรับหรือจ่ายค่างวด เช่น การนำเงินไปฝากธนาคารทุกต้นปี ปีละ 20,000 บาท เป็นเวลา 6 ปี หรือการซื้อรถยนต์แบบผ่อนส่ง โดยทำสัญญากับผู้จำหน่ายรถยนต์ว่าจะผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน เดือนละ 9,000 บาท เป็นเวลา 4 ปี

การหาเงินรวมของค่างวดทั้งหมด

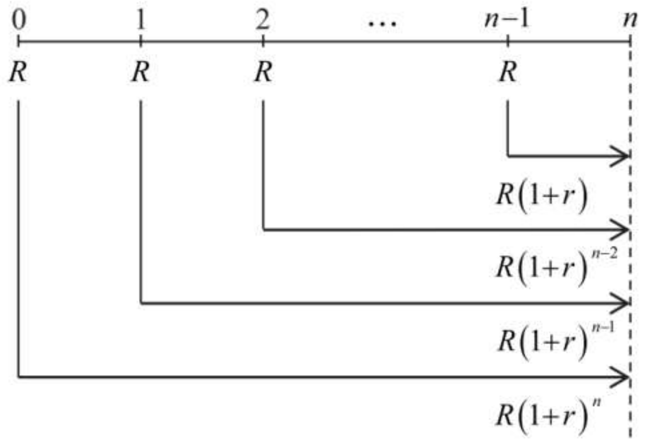
เมื่อมีการรับหรือจ่ายค่างวดติดต่อกันเป็นระยะเวลาหนึ่ง โดยกำหนดอัตราดอกเบี้ยคงที่ตลอดระยะเวลาดังกล่าว เมื่อสิ้นสุดระยะเวลาที่กำหนด เงินรวมของค่างวดทั้งหมดจะเท่ากับผลบวกของมูลค่าอนาคตของค่างวดแต่ละงวด การคำนวณหาเงินรวมทั้งหมดจะแบ่งเป็น 2 กรณี คือ ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด และค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนต้นงวด รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

ให้ $r = \frac{i}{100}$

จะได้ แผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวด ดังนี้



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R(1+r)+R(1+r)^2+\cdots+R(1+r)^n$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี n พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1+r)$ และอัตราส่วนร่วม คือ $1+r$

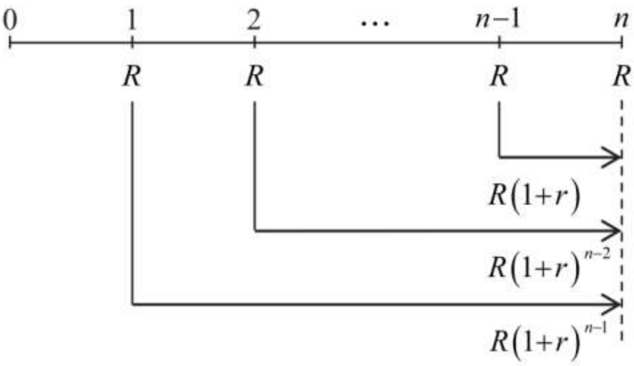
ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R(1+r)\left((1+r)^n-1\right)}{(1+r)-1}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{R(1+r)\left((1+r)^n-1\right)}{r}$

ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนสิ้นงวด รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

ให้ $r = \frac{i}{100}$

จะได้ แผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวด ดังนี้



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R+R(1+r)+R(1+r)^2+\cdots+R(1+r)^{n-1}$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี n พจน์ โดยพจน์แรก คือ R และอัตราส่วนร่วม คือ $1+r$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\dfrac{R\left((1+r)^n-1\right)}{(1+r)-1}$ ซึ่งเท่ากับ $\dfrac{R\left((1+r)^n-1\right)}{r}$

ตัวอย่างที่ 71

เพ็ญฝากเงิน 100 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 เพ็ญจะได้เงินรวมเท่าใด

วิธีทำ เพ็ญฝากเงินหรือจ่ายค่างวดตอนต้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

ในที่นี้ $R=100,\ n=24,\ i=\dfrac{6}{12}=0.5$ และ $r=\dfrac{0.5}{100}=0.005$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เงินรวมของเพ็ญ คือ

$$100(1.005)+100(1.005)^2+\cdots+100(1.005)^{24}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $100(1.005)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

จะได้ เงินรวม คือ $\dfrac{100(1.005)\left((1.005)^{24}-1\right)}{1.005-1}$ หรือประมาณ 2,555.91 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เพ็ญจะได้เงินรวมประมาณ 2,555.91 บาท ■

ตัวอย่างที่ 72

สายฟ้าฝากเงิน 100 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกสิ้นเดือน ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 สายฟ้าจะได้เงินรวมเท่าใด

วิธีทำ สายฟ้าฝากเงินหรือจ่ายค่างวดตอนสิ้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

ในที่นี้ $R = 100,\ n = 24,\ i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เงินรวมของสายฟ้า คือ

$$100+100(1.005)+100(1.005)^2+\cdots+100(1.005)^{23}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ โดยพจน์แรก คือ 100 และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

จะได้ เงินรวม คือ $\dfrac{100\left((1.005)^{24}-1\right)}{1.005-1}$ หรือประมาณ 2,543.20 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 สายฟ้าจะได้เงินรวมประมาณ 2,543.20 บาท ■

จากตัวอย่างที่ 71 และ 72 จะได้ว่าการฝากเงินทุกต้นงวดและทุกสิ้นงวด มีผลทำให้เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n มีจำนวนแตกต่างกัน โดยการฝากตอนต้นงวดจะได้รับเงินรวมมากกว่าการฝากตอนสิ้นงวด

อีกตัวอย่างหนึ่งของค่างวดที่พบเห็นได้ทั่วไป คือ ในการซื้อสินค้าแบบผ่อนส่ง โดยจะประกอบด้วยสองส่วน คือ เงินดาวน์ ซึ่งจ่ายทันทีเมื่อมีการตกลงซื้อขายกัน และเงินผ่อน ซึ่งจ่ายเป็นรายงวดโดยจ่ายเท่ากันทุกงวดติดต่อกันจนครบกำหนด ซึ่งเมื่อนำเงินดาวน์บวกกับผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด จะต้องเท่ากับราคาสินค้าเมื่อซื้อด้วยเงินสด

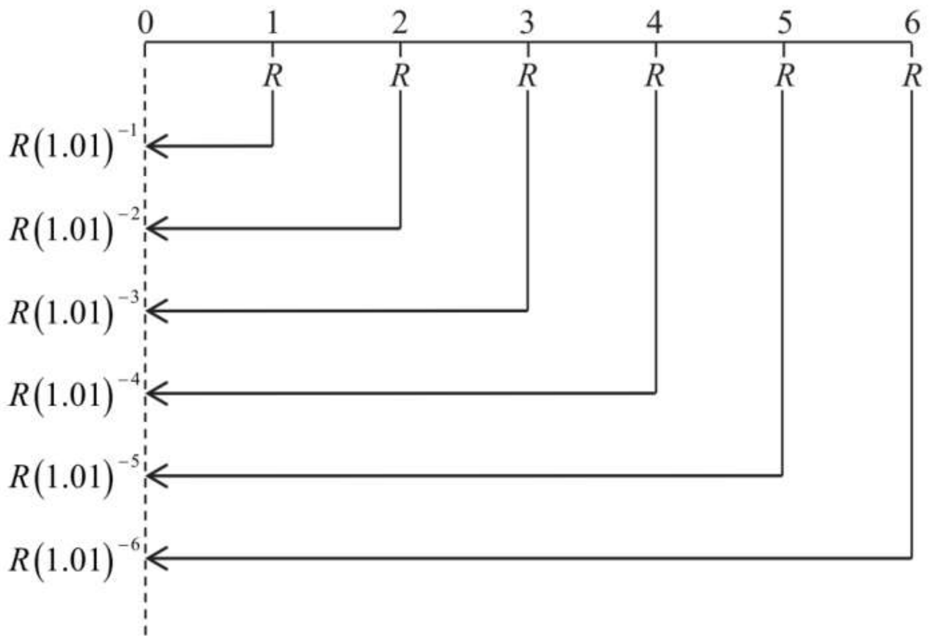
ตัวอย่างที่ 73

น้ำทิพย์ซื้อเครื่องซักผ้าราคา 20,000 บาท โดยตกลงจ่ายเงินดาวน์ 5,000 บาท และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินเท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 6 เดือน โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว น้ำทิพย์จะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด

วิธีทำ ให้ R แทนค่างวดที่น้ำทิพย์ต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

ในที่นี้ $i = \frac{12}{12} = 1$ และ $r = 0.01$

เนื่องจากน้ำทิพย์จ่ายเงินดาวน์ 5,000 บาท ทำให้เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 15,000 บาท โดยน้ำทิพย์จะผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 6 เดือน ดังนั้น จะต้องหามูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน



จากแผนภาพ จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ $1, 2, \ldots, 6$ คือ

$R(1.01)^{-1}, R(1.01)^{-2}, \ldots, R(1.01)^{-6}$ ตามลำดับ

นั่นคือ ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งหกงวด คือ

$$R(1.01)^{-1} + R(1.01)^{-2} + \cdots + R(1.01)^{-6}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 6 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1.01)^{-1}$ และอัตราส่วนร่วม คือ $(1.01)^{-1}$

ดังนั้น ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งหกงวด คือ $\frac{R(1.01)^{-1}\left(1-(1.01)^{-6}\right)}{1-(1.01)^{-1}}$

เนื่องจากน้ำทิพย์เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 15,000 บาท จะได้ว่า

$$15{,}000 = \frac{R(1.01)^{-1}\left(1-(1.01)^{-6}\right)}{1-(1.01)^{-1}}$$

$$R = \frac{15{,}000\left(1-(1.01)^{-1}\right)}{(1.01)^{-1}\left(1-(1.01)^{-6}\right)}$$

$$\approx 2{,}588.23$$

ดังนั้น น้ำทิพย์จะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 2,588.23 บาท ■

แบบฝึกหัด 1.5

1. สมมติว่าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 100,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหา
   1) จำนวนเงินเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี
   2) จำนวนปีที่จะทำให้มีเงินเพิ่มขึ้นเป็นอย่างน้อยสามเท่าของเงินต้น

2. ฝากเงินกับธนาคารจำนวน 100,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี จงหาจำนวนเงินในบัญชีเมื่อครบปีที่ n เมื่อ
   1) ธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ครั้งสุดท้ายครั้งเดียว
   2) ธนาคารนำดอกเบี้ยเข้าบัญชีเงินฝากทุกปี

3. สมมติว่าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 100,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกไตรมาส (ทุก 3 เดือน) จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี

4. สมมติว่าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 100,000 บาท เมื่อฝากเงินครบ 10 ปี มีเงินทั้งสิ้น 141,060 บาท ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปี

5. เมื่อต้นปีปัญญาฝากเงิน 100,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่ง และฝากเงินเพิ่มอีก 100,000 บาท ทุกต้นปี โดยธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 15 ปี

6. ราตรีต้องการฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี ถ้าราตรีต้องการให้มีเงินในบัญชี 1,000,000 บาท ในอีก 20 ปีข้างหน้า ราตรีต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยเท่าใด โดยที่
   1) ราตรีไม่ฝากเงินเพิ่มอีก
   2) ราตรีฝากเงินเพิ่มอีกปีละ 2,000 บาท

7. อนันต์กู้เงินจากวิเชียรจำนวน 2 ยอด โดยยอดแรกต้องชำระ 12,682.42 บาท ในอีก 3 ปีข้างหน้า ส่วนยอดที่ 2 ต้องชำระ 26,115.36 บาท ในอีก 7 ปีข้างหน้า ถ้าวิเชียรกำหนดอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาจำนวนเงินทั้งหมดที่อนันต์กู้จากวิเชียร

8. สุดาฝากเงิน 2,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน ได้รับอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 5 สุดาจะได้เงินรวมเท่าใด

9. ทอแสงฝากเงิน 3,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกสิ้นไตรมาส (1 ไตรมาส เท่ากับ 3 เดือน) ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกไตรมาส เมื่อสิ้นปีที่ 4 ทอแสงจะได้เงินรวมเท่าใด

10. ใบเตยซื้อรถยนต์ราคา 700,000 บาท โดยตกลงจ่ายเงินดาวน์ 200,000 บาท และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินเท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 5 ปี โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว ใบเตยจะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด

11. วัชระฝากเงิน 10,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน ได้รับอัตราดอกเบี้ย 3.6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 4 วัชระจะได้เงินรวมเท่าใด

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาพจน์ของลำดับเลขคณิตที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1) a_8 เมื่อกำหนดให้ $a_1 = -4$ และ $d = -5$
   2) a_9 เมื่อกำหนดให้ $a_1 = -5$ และ $d = 2$
   3) a_{15} เมื่อกำหนดให้ $a_1 = -\frac{1}{2}$ และ $d = -2$
   4) a_{15} เมื่อกำหนดให้ $a_1 = \frac{4}{3}$ และ $d = \frac{1}{3}$

2. จงหาพจน์ที่ 100 ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ที่ 7 คือ 5 และพจน์ที่ 12 คือ 10

3. ถ้าสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ 20, 16 และ 12 แล้ว -96 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับนี้

4. ถ้า 5 และ 29 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์อีกห้าพจน์อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ จงหาพจน์ห้าพจน์ดังกล่าว

5. ถ้า $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว จงแสดงว่า a^2, b^2, c^2 เป็นลำดับเลขคณิต

6. ✪ จงหาผลบวกของมุมภายในของรูป n เหลี่ยม โดยใช้ความรู้เรื่องลำดับเลขคณิต พร้อมทั้งแสดงวิธีคิด

7. จัดแผ่นไม้ที่มีขนาดเท่ากันกองหนึ่งวางซ้อนกัน โดยเริ่มจากวางแผ่นไม้ในชั้นล่างเรียงตามแนวยาวชิดกันจำนวน 52 แผ่น จากนั้นวางแผ่นไม้ในชั้นที่ 2 โดยให้แนวกึ่งกลางตามด้านยาวของแผ่นไม้แต่ละแผ่นอยู่ตรงกับรอยต่อของแผ่นไม้แต่ละคู่ในชั้นแรก ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนชั้นบนสุดมีแผ่นไม้ 7 แผ่น จงหาความสูงของแผ่นไม้กองนี้ ถ้าแผ่นไม้แต่ละแผ่นหนา 3 เซนติเมตร

8. ฟางข้าวมีเงินเก็บ 4,200 บาท และใยบัวมีเงินเก็บ 7,000 บาท ถ้าตั้งแต่เดือนตุลาคม 2560 ฟางข้าวออมเงินเพิ่มเดือนละ 300 บาท และใยบัวออมเงินเพิ่มเดือนละ 250 บาท จงหาว่า
    1) เมื่อใดฟางข้าวจึงจะมีเงินเก็บ 12,300 บาท และขณะนั้นใยบัวจะมีเงินเก็บเท่าใด
    2) ถ้าใยบัวต้องการนำเงินเก็บไปซื้อคอมพิวเตอร์ราคา 24,700 บาท ใยบัวจะต้องออมเงินอย่างน้อยกี่เดือน
    3) เมื่อใดฟางข้าวจึงจะมีเงินเก็บมากกว่าใยบัว

9. จงหาพจน์ที่ 12 ของลำดับเรขาคณิต $-162, 54, -18, 6, \ldots$

10. จงหาอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_2 = \frac{8}{3}$ และ $a_5 = \frac{64}{81}$

11. 5,103 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับเรขาคณิต $7, -21, 63, -189, \ldots$

12. จงหาจำนวนที่บวกกับ 5, 22 และ 107 แล้ว ผลบวกที่ได้เป็นพจน์สามพจน์ที่เรียงติดกันในลำดับเรขาคณิต

13. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิตที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่มีผลบวกและผลคูณของสามพจน์แรกเป็น -3 และ 8 ตามลำดับ

14. การรณรงค์ลดการใช้ถุงพลาสติกในอำเภอหนึ่ง ทำให้จำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วลดลงปีละ 5% ถ้าในปีที่เริ่มต้นการรณรงค์มีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว 100,000 ถุง จงหาสูตรการคำนวณจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วในแต่ละปี พร้อมทั้งหาจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วในปีที่ 10

15. เมือง A มีพื้นที่ป่า 400 ตารางกิโลเมตร โดยพื้นที่ป่าลดลงทุกปีเฉลี่ยปีละ 4% และเมือง B มีพื้นที่ป่า 60 ตารางกิโลเมตร โดยพื้นที่ป่าเพิ่มขึ้นทุกปีเฉลี่ยปีละ 2% จงหาว่า
    1) อีก 10 ปีข้างหน้า เมืองใดจะมีพื้นที่ป่ามากกว่ากัน และมีพื้นที่ป่ามากกว่าอีกเมืองเท่าใด
    2) อีกอย่างน้อยกี่ปี เมือง B จึงจะมีพื้นที่ป่ามากกว่าเมือง A

16. จงหาพจน์ที่ขาดหายไปของลำดับเลขคณิตหรือลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

1) $11, \frac{27}{2}, 16, ___, ___, ___$

2) $\frac{7}{11}, \frac{11}{7}, ___, \frac{265}{77}, ___, ___$

3) $6, 4, \frac{8}{3}, ___, ___, ___$

4) $\frac{5}{6}, -\frac{5}{3}, ___, -\frac{20}{3}, ___, ___$

17. จงหาจำนวนจริง a, b และ c ทั้งหมดที่ a, b, c เป็นลำดับเรขาคณิต และ b, a, c เป็นลำดับเลขคณิต

18. ให้พจน์ที่หนึ่งและพจน์ที่สองของลำดับเลขคณิตเท่ากับพจน์ที่หนึ่งและพจน์ที่สองของลำดับเรขาคณิต ตามลำดับ และพจน์ที่สามของลำดับเรขาคณิตมากกว่าพจน์ที่สามของลำดับเลขคณิตอยู่ 2.5 ถ้าพจน์แรกของลำดับทั้งสอง คือ 10 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตดังกล่าว

19. บริษัท A และบริษัท B มีเงื่อนไขในการให้เงินเดือนเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคล ดังนี้

- บริษัท A ให้เงินเดือนเริ่มต้น 20,000 บาท และแต่ละปีจะขึ้นเงินเดือนให้ 1,500 บาท
- บริษัท B ให้เงินเดือนเริ่มต้น 20,000 บาท และแต่ละปีจะขึ้นเงินเดือนให้ 5%

1) จงเขียนลำดับแทนเงินเดือนเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A และบริษัท B ในแต่ละปี

2) จงหาผลต่างของเงินเดือนในปีที่ 10 ของเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของทั้งสองบริษัท

20. จงเขียนกราฟเพื่อตรวจสอบว่าลำดับที่มีพจน์ทั่วไปในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิต

1) $a_n = 2\cos\frac{n\pi}{6}$

2) $a_n = \frac{1}{n}\sin^2\left(\frac{n\pi}{12}\right)$

3) $a_n = \frac{8}{n^2+8}$

4) $a_n = \frac{\log(n+10)}{n}$

5) $a_n = \frac{2^n}{n^2}$

6) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

21 จงใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับเพื่อตรวจสอบว่าลำดับที่มีพจน์ทั่วไปในแต่ละข้อเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิต

1) $a_n = \dfrac{1}{2n^2+1}$

2) $a_n = \dfrac{2^n}{7^n}$

3) $a_n = (-1)^{4n+3}$

4) $a_n = 3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$

5) $a_n = 2 + \dfrac{n}{3}$

6) $a_n = \dfrac{3n^2(n-2)!}{n!}$

7) $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{n}$

8) $a_n = \dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n}$

9) $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{(n-1)^2+1}$

10) $a_n = \dfrac{3^{n-3}}{2^{n+3}}$

11) $a_n = \dfrac{4^{n+1}+2^{3n+2}}{3^{2n}}$

12) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+1}$

13) $a_n = \sqrt{\dfrac{n^3+8}{8n^3+n-8}}$

14) $a_n = \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{2n}$

15) $a_n = n - \dfrac{n^2+3}{n-7}$

16) $a_n = \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{n-3n^2}{6n-5}$

22 กำหนดลำดับ $a_n = \dfrac{2n^4-n^2}{3n^4+13}$ จงพิจารณาว่าวิธีการหาลิมิตของลำดับ a_n ที่แสดงดังต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่ ถ้าไม่ถูกต้อง จงให้เหตุผล

> โดยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4-n^2}{3n^4+13} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(2n^4-n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3n^4+13)}$
>
> แต่เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^4-n^2)$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}(3n^4+13)$ ไม่มีค่า
>
> ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4-n^2}{3n^4+13}$ จึงไม่มีค่า

23 กำหนดลำดับ $a_n = \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+5}\right)^n$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม จงหา x ที่ทำให้ a_n เป็นลำดับลู่เข้า

24 จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $19+23+27+\cdots+999$

25 จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต เมื่อกำหนดให้

1) $n=40$ และลำดับเลขคณิต คือ $2, 6, 10, 14, \ldots$
2) $n=70$ และลำดับเลขคณิต คือ $20, 17, 14, 11, \ldots$
3) $n=100$ และลำดับเลขคณิต คือ $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \ldots$

26 จงหาผลบวกของจำนวนที่ 7 หารลงตัว ตั้งแต่ 9 ถึง 357

27 ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์ที่ 4 คือ 11 และพจน์ที่ 9 คือ -4 จงหาผลบวกของพจน์ที่ 12 ถึงพจน์ที่ 25

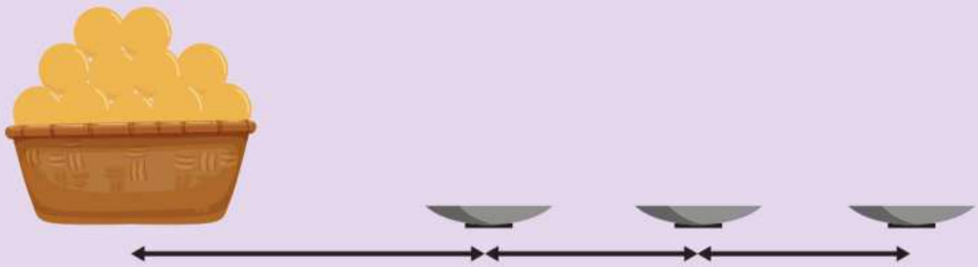
28 โรงละครแห่งหนึ่งต้องการจัดเก้าอี้สำหรับการแสดงใหญ่ที่จะจัดขึ้น โดยจัดเก้าอี้แถวแรกไว้ 12 ตัว แถวที่สอง 14 ตัว แถวที่สาม 16 ตัว เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จงหาว่า

1) ถ้าต้องการจัดเก้าอี้ไว้ทั้งหมด 20 แถว จะต้องใช้เก้าอี้ทั้งหมดกี่ตัว
2) ถ้าโรงละครแห่งนี้ต้องการจัดที่นั่ง 600 ที่นั่ง จะต้องจัดเก้าอี้ทั้งหมดกี่แถว และแถวสุดท้ายมีเก้าอี้ทั้งหมดกี่ตัว

29 โรงเรียนแห่งหนึ่งจัดการแข่งขันวิ่งวิบาก โดยมีกติกาดังนี้

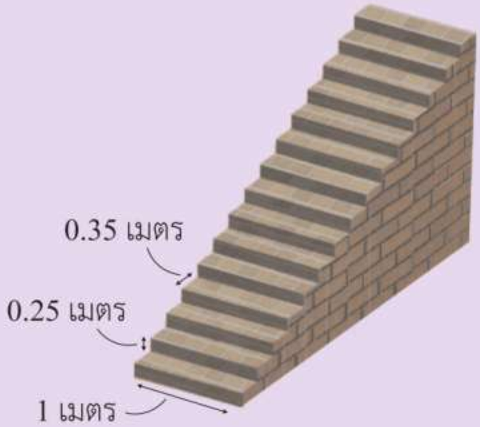
- ให้ผู้เข้าแข่งขันเริ่มต้นที่จุดวางตะกร้าใส่ลูกปิงปองของแต่ละคน
- ใช้ช้อนตักลูกปิงปอง 1 ลูกจากตะกร้า แล้วนำลูกปิงปองไปใส่ชามใบที่ใกล้ตะกร้าที่สุด
- กลับไปตักลูกปิงปองอีก 1 ลูกจากตะกร้า แล้วนำลูกปิงปองไปใส่ชามใบที่ใกล้ตะกร้าใบถัดไป
- ถ้าผู้เข้าแข่งขันทำลูกปิงปองตกจากช้อน ให้กลับไปตักลูกปิงปองจากตะกร้า แล้วจึงทำการแข่งขันต่อไป โดยไม่ต้องเริ่มใหม่
- ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนผู้เข้าแข่งขันนำลูกปิงปองไปใส่ชามครบทุกใบ แล้วกลับไปที่จุดเริ่มต้น
- ผู้เข้าแข่งขันที่ใช้เวลาน้อยที่สุดเป็นผู้ชนะ

ถ้าเรียกชามใบที่ใกล้ตะกร้าที่สุดว่า ชามใบที่ 1 เรียกชามใบที่ใกล้ตะกร้าใบถัดไปว่า ชามใบที่ 2 เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ โดยวางตะกร้าใส่ลูกปิงปองห่างจากชามใบที่ 1 เป็นระยะทาง 5 เมตร และชามใบที่ติดกันอยู่ห่างกัน 3 เมตร ดังรูป



1) จงหาระยะห่างระหว่างตะกร้ากับชามใบที่ 1
2) จงหาระยะห่างระหว่างตะกร้ากับชามใบที่ 2
3) จงหาระยะห่างระหว่างตะกร้ากับชามใบที่ 3
4) จงหาระยะห่างระหว่างตะกร้ากับชามใบที่ n
5) ถ้าระยะห่างระหว่างตะกร้ากับชามใบสุดท้ายเท่ากับ 23 เมตร จงหาจำนวนชามทั้งหมด
6) จากข้อ 5) จงหาระยะทางจากจุดเริ่มต้นจนสิ้นสุดการแข่งขัน
    6.1) ถ้าผู้เข้าแข่งขันไม่ทำลูกปิงปองตกเลย
    6.2) ถ้าผู้เข้าแข่งขันทำลูกปิงปองตกระหว่างที่นำลูกปิงปองไปใส่ในชามใบที่ 4 โดยทำตกห่างจากตะกร้า 3 เมตร

30 บันไดทางขึ้นวัดแห่งหนึ่งสร้างด้วยอิฐเป็นทรงตันจำนวน 15 ขั้น โดยบันไดแต่ละขั้นยาว 1 เมตร กว้าง 0.35 เมตร และสูง 0.25 เมตร จงหาปริมาตรของอิฐที่ใช้สร้างบันไดนี้



31 จงหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต $6+18+54+\cdots+1{,}458$

32 จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต เมื่อกำหนดให้

1) $n=30$ และลำดับเรขาคณิต คือ $1, 4, 16, 64, \ldots$

2) $n=43$ และลำดับเรขาคณิต คือ $-\frac{3}{32}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \ldots$

3) $n=28$ และลำดับเรขาคณิต คือ $\frac{27}{32}, \frac{9}{16}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \ldots$

33 ลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์ที่ 5 คือ -4 และพจน์ที่ 8 คือ $\frac{1}{2}$ จงหาผลบวกของพจน์ที่ 2 ถึงพจน์ที่ 9

34 วิทยามีเงิน 6,561 บาท ถ้าเขาไปเที่ยวและใช้เงินทุกวัน โดยที่แต่ละวันใช้เงิน $\frac{1}{3}$ ของเงินที่มีอยู่ จงหาว่าเมื่อครบ 8 วัน เขาจะมีเงินเหลือเท่าใด

35 รายการลูกทุ่งเสียงทองเป็นรายการแข่งขันร้องเพลงลูกทุ่ง เพื่อเฟ้นหาสุดยอดนักร้องลูกทุ่งเสียงทองจากผู้เข้าแข่งขันที่ผ่านการคัดเลือกมาแล้วจำนวน 32 คน โดยการแข่งขันรอบแรกผู้เข้าแข่งขัน 16 คู่ จะต้องประชันเสียงร้องเพลง เพื่อให้กรรมการตัดสินว่าใครคือผู้ชนะในแต่ละคู่ ซึ่งผู้ชนะจะมีสิทธิ์ได้เข้าแข่งขันในรอบต่อไป และดำเนินการแข่งขันเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนได้ผู้ชนะในรอบสุดท้ายเป็นสุดยอดนักร้องลูกทุ่งเสียงทอง จงหาว่า

1) ในรอบที่ n มีผู้เข้าแข่งขันกี่คู่
2) รายการลูกทุ่งเสียงทองมีการแข่งขันทั้งหมดกี่รอบ
3) รายการลูกทุ่งเสียงทองมีการแข่งขันทั้งหมดกี่คู่

36. คอนโดมิเนียมแห่งหนึ่งมีโครงการกำจัดแมลงสาบภายในอาคาร โดยได้ประมาณจำนวนแมลงสาบที่มีอยู่ขณะเริ่มต้นโครงการไว้ 6,000 ตัว หลังจากวางยากำจัดแมลงสาบในจุดต่าง ๆ ภายในอาคาร พบว่า อัตราการลดลงของจำนวนแมลงสาบเท่ากับ 17% ต่อวัน ถ้าไม่มีแมลงสาบเพิ่มขึ้นในระยะเวลา 7 วัน นับจากเริ่มต้นโครงการ จงหา
1) จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่เริ่มต้นโครงการ
2) จำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่หลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 1 วัน
3) จำนวนแมลงสาบทั้งหมดที่ถูกกำจัดหลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน
4) จำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่หลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน

37. เศรษฐีคนหนึ่งต้องการจ้างพรานป่านำทางไปหารากไม้หายากชนิดหนึ่งในป่าลึก เพื่อนำมาสกัดเป็นยาอายุวัฒนะ โดยพรานป่าได้คาดการณ์ไว้แล้วว่าน่าจะใช้เวลาในการปฏิบัติภารกิจทั้งหมดอย่างน้อย 25 วัน เขาจึงเสนอให้เศรษฐีเลือกจ่ายค่าตอบแทนแบบใดแบบหนึ่งในสองแบบต่อไปนี้

แบบที่ 1 จ่ายเงินวันละ 50,000 บาท

แบบที่ 2 วันแรกจ่ายเงิน 5 สตางค์ วันที่ 2 จ่ายเงิน 10 สตางค์ วันที่ 3 จ่ายเงิน 20 สตางค์ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนปฏิบัติภารกิจเสร็จสิ้น

จงหาว่า
1) ถ้าเศรษฐีทราบระยะเวลาที่พรานป่าคาดการณ์ เศรษฐีควรเลือกจ่ายค่าตอบแทนแบบใดจึงจะประหยัดเงินที่สุด
2) ถ้าเศรษฐีเลือกจ่ายค่าตอบแทนแบบที่เลือกในข้อ 1) และการปฏิบัติภารกิจใช้เวลาทั้งสิ้น 30 วัน เศรษฐีจะประหยัดเงินกว่าการจ่ายค่าตอบแทนอีกแบบเป็นจำนวนเงินเท่าใด
3) ถ้าการปฏิบัติภารกิจผิดไปจากที่พรานป่าคาดการณ์ โดยใช้เวลาไม่ถึง 25 วัน การจ่ายค่าตอบแทนแบบที่เลือกในข้อ 1) ยังจะประหยัดกว่าอีกแบบหรือไม่

38 จงพิจารณาว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นอนุกรมเลขคณิตหรืออนุกรมเรขาคณิต พร้อมทั้งหาผลบวกของอนุกรม

1) $2+8+32+\cdots+8{,}192$
2) $7+14+21+\cdots+98$
3) $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\cdots+30$
4) $16+8+4+\cdots+\frac{1}{32}$
5) $(-1)+3+(-9)+\cdots+(-729)$
6) $-10-6-2+\cdots+90$

39 จงหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมต่อไปนี้

1) $5+3+\frac{9}{5}+\cdots+5\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\cdots$
2) $\frac{9}{25}+\frac{3}{5}+1+\cdots+\frac{9}{25}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}+\cdots$
3) $\frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}+\cdots$
4) $1+(-1)+(-3)+\cdots+(3-2n)+\cdots$
5) $4+0+(-14)+\cdots+(4+n^2-n^3)+\cdots$
6) $18+1.8+0.18+\cdots+18(0.1)^{n-1}+\cdots$
7) $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots$
8) $\frac{\sqrt{2}-1}{1\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2}+\cdots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}+\cdots$

40 จงพิจารณาว่าอนุกรมในข้อ 39 อนุกรมใดบ้างที่เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกของอนุกรมเป็นเท่าใด

41 อนุกรมเรขาคณิตอนุกรมหนึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้าและผลบวกของอนุกรมเท่ากับ 1 ถ้าผลบวก 2 พจน์แรกของอนุกรมนี้คือ $\frac{3}{4}$ จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้

42 จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

1) $0.\dot{1}2\dot{3}$

2) $0.11\dot{2}$

3) $1.\dot{9}$

4) $0.0989898\ldots$

43 จงหา a_1 และ r เมื่อ $a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots = \frac{3}{2}$

และ $a_1 - a_1r + a_1r^2 - a_1r^3 + \cdots + (-1)^{n-1} a_1r^{n-1} + \cdots = \frac{3}{4}$

44 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีแต่ละด้านยาว 10 นิ้ว รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่สองเกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปแรก และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่สามเกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปที่สอง ถ้าสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด จงหาผลบวกของความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมด

☆ 45. หอยทากตัวหนึ่งตกลงไปที่ก้นบ่อน้ำซึ่งมีความลึก 10 เมตร ในช่วงเวลากลางวันของแต่ละวัน หอยทากตัวนี้จะคลานขึ้นมาได้วันละ 5 เมตร แต่ในเวลากลางคืนที่หอยทากหลับ หอยทากตัวนี้จะลื่นลงไปเป็นระยะทางครึ่งหนึ่งของระยะห่างระหว่างตัวมันกับก้นบ่อ จงพิจารณาว่าหอยทากตัวนี้จะสามารถคลานออกจากบ่อน้ำนี้ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

46 จงหาลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมต่อไปนี้

1) $(-2) + 8 + (-24) + \cdots + n(-2)^n + \cdots$

2) $1 + 0.2 + 0.03 + \cdots + 10\left(\frac{n}{10^n}\right) + \cdots$

☆ 3) $1 + 4 + 18 + \cdots + n \cdot n! + \cdots$

47 พนักงานห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งจัดเรียงส้มสายน้ำผึ้งให้มีลักษณะคล้ายพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยเขาได้วางส้มในชั้นแรก 100 ผล ชั้นที่สอง 81 ผล ชั้นที่สาม 64 ผล เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จงหาว่า

1) จะสามารถวางส้มได้ทั้งหมดกี่ผล
2) ถ้าไม่นับส้มในชั้นที่ 5 และ 7 จะมีส้มทั้งหมดกี่ผล
3) ถ้านำส้ม 1,015 ผล มาจัดเรียงเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะต้องวางส้มในชั้นแรกจำนวนกี่ผล และจะวางส้มได้ทั้งหมดกี่ชั้น

48 ฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งจำนวน 5,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 1.5 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาจำนวนเงินในบัญชี เมื่อฝากเงินครบ 3 ปี

49 ฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งจำนวน 18,600 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาจำนวนเงินในบัญชี เมื่อฝากเงินครบ 15 ปี

50 แม่ของสุทัศน์ขายที่ดินได้เงิน 10,000,000 บาท และต้องการนำเงินไปฝากธนาคารเพื่อเก็บไว้เป็นทุนการศึกษาของสุทัศน์ในอีก 10 ปีข้างหน้า โดยแม่ของสุทัศน์ได้ข้อมูลจากธนาคาร 2 แห่ง ดังนี้

- ธนาคาร A กำหนดอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสิ้นเดือน
- ธนาคาร B กำหนดอัตราดอกเบี้ย 12.5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสิ้นปี

แม่ของสุทัศน์ควรเลือกฝากเงินกับธนาคารใด จึงจะได้เงินรวมมากที่สุด และจะได้เงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 10 เท่าใด

51 เอกฝากเงิน 100,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่ง โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน เมื่อฝากเงินครบ 10 ปี เขาพบว่ามีเงินในบัญชีประมาณ 148,595 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปีที่ธนาคารกำหนด ถ้าอัตราดอกเบี้ยคงที่ตลอดระยะเวลาที่ฝากเงิน

52 ต้นตระการกู้เงินจากวิทวัสเพื่อเป็นค่าผ่าตัดของแม่จำนวน 200,000 บาท โดยมีกำหนดชำระหนี้ทั้งหมดในอีก 2 ปีข้างหน้า เป็นเงิน 300,000 บาท จงหาว่าดอกเบี้ยที่วิทวัสเรียกเก็บคิดเป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปีเท่าใด ถ้าคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี และอัตราดอกเบี้ยดังกล่าวเป็นไปตามที่กฎหมายกำหนดไว้หรือไม่ (อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ยืมตามกฎหมายไม่เกินร้อยละ 15 ต่อปี)

เสริมสมอง : อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ยืมตามกฎหมาย

บุคคลใดให้ผู้อื่นกู้ยืมเงินโดยเรียกดอกเบี้ยเกินอัตราที่กฎหมายกำหนดไว้ กล่าวคือ ร้อยละ 15 ต่อปี ตามที่บัญญัติไว้ในมาตรา 654 แห่งประมวลกฎหมายแพ่งและพาณิชย์ พ.ศ. 2535 จะมีความผิดตามพระราชบัญญัติห้ามเรียกดอกเบี้ยเกินอัตรา พ.ศ. 2560 ต้องระวางโทษจำคุกไม่เกินสองปี หรือปรับไม่เกินสองแสนบาท หรือทั้งจำทั้งปรับ

53 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการปรับเปลี่ยนกลยุทธ์ทางธุรกิจจึงมีนโยบายปลดพนักงานจำนวน 2 คน แต่ด้วยสัญญาจ้างที่พนักงานทั้งสองทำไว้กับบริษัท ทำให้บริษัทต้องจ่ายเงินชดเชยรายเดือนให้กับพนักงานแต่ละคนเป็นจำนวนเงินเท่ากับเงินเดือนเดือนสุดท้ายที่พนักงานแต่ละคนได้รับจนครบอายุสัญญา โดยพนักงานทั้งสองมีอายุสัญญาจ้างกับบริษัทเหลืออยู่ 3 ปีเท่ากัน พนักงานคนแรกได้รับเงินเดือนเดือนสุดท้าย 23,000 บาท และพนักงานคนที่สองได้รับเงินเดือนเดือนสุดท้าย 37,000 บาท ถ้า ณ วันที่ปลดพนักงาน นายจ้างนำเงินจำนวนหนึ่งไปฝากไว้กับธนาคารซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เพื่อนำดอกเบี้ยที่ได้ในแต่ละเดือนไปจ่ายเป็นเงินชดเชยให้กับพนักงานทั้งสอง จงหาว่านายจ้างต้องฝากเงินไว้อย่างน้อยเท่าใด

54 วิชัยต้องการฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี ถ้าวิชัยต้องการให้มีเงินในบัญชีประมาณ 250,000 บาท ในเวลา 10 ปี เขาต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยเท่าใด

55. ธีระฝากเงินจำนวนหนึ่งไว้กับธนาคารแห่งหนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป 10 ปี พบว่ามีเงินในบัญชี 122,079.42 บาท ถ้าธนาคารคงอัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาเงินต้นที่ธีระฝากไว้เมื่อ 10 ปีก่อน

56. หมากฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งเดือนละ 2,000 บาท ทุกสิ้นเดือน ถ้าธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นเดือนที่ 24 หมากจะมีเงินรวมเท่าใด

57. มะปรางมีรายรับเดือนละ 20,000 บาท ถ้ามะปรางต้องการออมเงินทุกสิ้นเดือนเดือนละ 10% ของรายรับ โดยฝากเข้าบัญชีธนาคารที่กำหนดอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อเวลาผ่านไป 2 ปี มะปรางจะมีเงินออมทั้งหมดเท่าใด

58. ในวันที่ 1 มิถุนายน 2561 ส้มซ่าฝากเงิน 100,000 บาท เข้าบัญชีเงินฝากออมทรัพย์ที่ให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 1.2 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน ถ้าส้มซ่าโอนเงินให้น้องสาวผ่านบริการ e-Banking เดือนละ 5,000 บาท ทุกวันที่ 1 ของเดือน ตั้งแต่เดือนมิถุนายน 2561 โดยไม่เสียค่าธรรมเนียมในการโอนเงิน เมื่อครบ 1 ปี ส้มซ่าจะได้รับดอกเบี้ยจากบัญชีเงินฝากนี้เท่าใด

เสริมสมอง : e-Banking

ระบบธนาคารผ่านทางอินเทอร์เน็ต หรือ e-Banking (electronic banking) คือ การทำธุรกรรมต่าง ๆ กับธนาคาร โดยผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต เช่น การฝากเงิน ถอนเงิน โอนเงิน หรือสอบถามยอดเงิน ปัจจุบันธนาคารพาณิชย์เกือบทุกแห่งเปิดให้บริการ e-Banking แล้วในชื่อต่าง ๆ เช่น internet banking, online banking, cyber banking ซึ่งผู้ใช้บริการสามารถทำธุรกรรมผ่านทางคอมพิวเตอร์โดยไม่ต้องเดินทางไปที่ธนาคาร นอกจากนี้ ธนาคารยังเพิ่มช่องทางให้บริการผ่านทางโทรศัพท์มือถือ (mobile banking) ซึ่งพัฒนาขึ้นเพื่อรองรับการใช้งานบนสมาร์ตโฟนและแท็บเล็ต

59 ยอดรักผ่อนตู้เย็นราคา 30,000 บาท ด้วยยอดชำระเท่ากันทุกเดือนเป็นเวลา 6 เดือน โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 18% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว ยอดรักจะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด

60 อนงค์ซื้อรถยนต์ราคา 600,000 บาท โดยตกลงจ่ายเงินดาวน์ 15% ของราคารถยนต์ และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินเท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 4 ปี โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว อนงค์จะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด และเสียดอกเบี้ยทั้งหมดเท่าใด

บทที่ 2

แคลคูลัสเบื้องต้น



ที่มา : บริษัท มติชน จำกัด (มหาชน)

ใน พ.ศ. 2554 ประเทศไทยประสบกับวิกฤตมหาอุทกภัยที่มีความรุนแรงสูงสุดในรอบ 70 ปี โดยมีพื้นที่ที่ได้รับความเสียหายทั่วทุกภูมิภาคของประเทศ และมีประชาชนได้รับความเดือดร้อนกว่า 13 ล้านคน กรุงเทพมหานครได้รับความเสียหายอย่างหนักในช่วงเดือนตุลาคม – พฤศจิกายน โดยก่อนหน้านั้นประชาชนที่อาศัยอยู่ในพื้นที่กรุงเทพมหานครและปริมณฑลต่างวิตกกังวลเป็นอย่างหนัก เพราะไม่ทราบว่าปริมาณน้ำอันมหาศาลจะไหลมาท่วมที่พักอาศัยของตนหรือไม่

หากก่อนที่จะเกิดมหาอุทกภัยมีแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่มีความแม่นยำในการทำนายการไหลของมวลน้ำได้ หน่วยงานภาครัฐที่เกี่ยวข้องก็จะสามารถบริหารจัดการกับมวลน้ำมหาศาลนี้ได้ อีกทั้งยังสามารถแจ้งเตือนประชาชนในพื้นที่ที่อาจได้รับความเสียหายให้เตรียมการอพยพล่วงหน้า ซึ่งแคลคูลัสเป็นพื้นฐานในการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อจำลองสถานการณ์อุทกภัยดังกล่าว โดยบูรณาการร่วมกับศาสตร์อื่น ๆ เช่น ฟิสิกส์ ภูมิศาสตร์

ความรู้ก่อนหน้า

- จำนวนจริง
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- เรขาคณิตวิเคราะห์

ipst.me/10551

2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้ จะพิจารณาว่าค่าของฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง จะเข้าใกล้ค่าใด ขณะที่ x เข้าใกล้จำนวนจริงจำนวนหนึ่ง

ก่อนอื่นจะเริ่มด้วยการพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - x + 4$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$ ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 และ 2 แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$

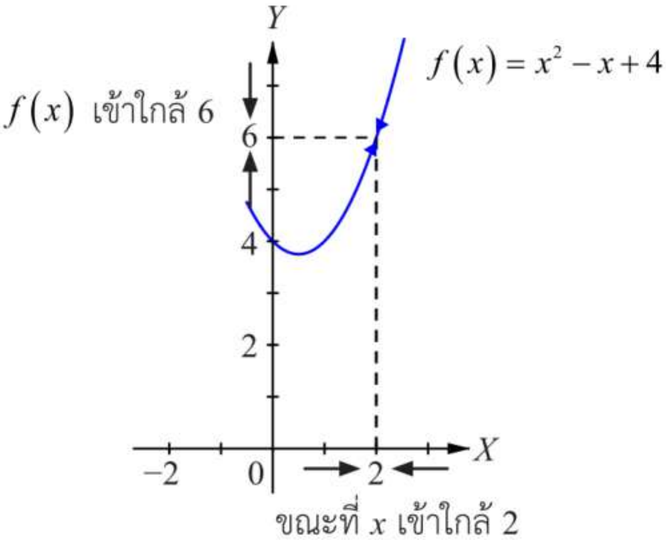
x	$f(x)$
1.0	4.000000
1.5	4.750000
1.8	5.440000
1.9	5.710000
1.95	5.852500
1.99	5.970100
1.995	5.985025
1.999	5.997001

ตารางที่ 1

x	$f(x)$
3.0	10.000000
2.5	7.750000
2.2	6.640000
2.1	6.310000
2.05	6.152500
2.01	6.030100
2.005	6.015025
2.001	6.003001

ตารางที่ 2

จากตารางที่ 1 จะเห็นได้ชัดเจนว่า เมื่อ x เพิ่มขึ้นจาก 1 และเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นจาก 4 และเข้าใกล้ 6 จากตารางที่ 2 เมื่อ x ลดลงจาก 3 และเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$ จะลดลงจาก 10 และเข้าใกล้ 6 ซึ่งถ้าพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน f จะเห็นสมบัติเช่นกัน



รูปที่ 1

จากตารางที่ 1 ตารางที่ 2 และกราฟของฟังก์ชัน f ในรูปที่ 1 จะเห็นว่า ขณะที่ x เข้าใกล้ 2 ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ 2 (เมื่อ $x < 2$ และเมื่อ $x > 2$) ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ 6 ในกรณีนี้จะกล่าวว่า "ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - x + 4$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 เท่ากับ 6" ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 6$ หรือ $\lim\limits_{x \to 2}\left(x^2 - x + 4\right) = 6$

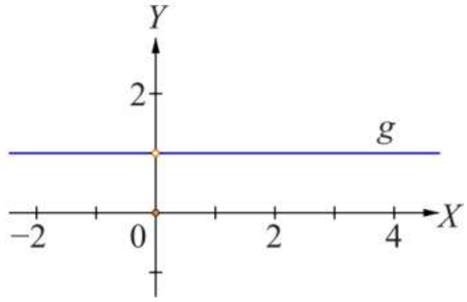
โดยทั่วไป สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ a แล้วจะเรียก L ว่า **ลิมิตของ f ที่ a** ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ มีค่าเท่ากับ L

แต่ถ้าไม่มีจำนวนจริง L ซึ่ง $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้วจะกล่าวว่า "f ไม่มีลิมิตที่ a" หรือกล่าวว่า "$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ไม่มีค่า"

นอกจากนี้อาจแทนสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ด้วย " $f(x) \to L$ เมื่อ $x \to a$ "
ซึ่งอ่านว่า " $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a "

พิจารณาฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชัน g

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } x \neq 0 \\ 0 \text{ เมื่อ } x = 0 \end{cases}$$



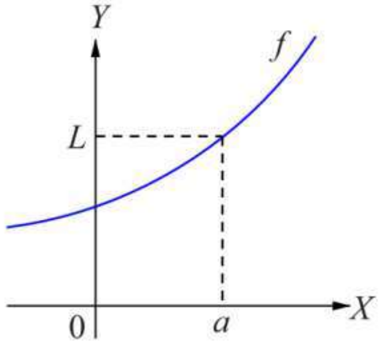
รูปที่ 2

ในขณะที่ x เข้าใกล้ 0 ทั้งทางด้านซ้ายและขวา (เมื่อ $x < 0$ และ $x > 0$) ค่าของ $g(x)$ จะเท่ากับ 1 ดังนั้น $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$ อาจกล่าวว่า $g(x)$ เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ในขณะที่ $g(0) = 0$

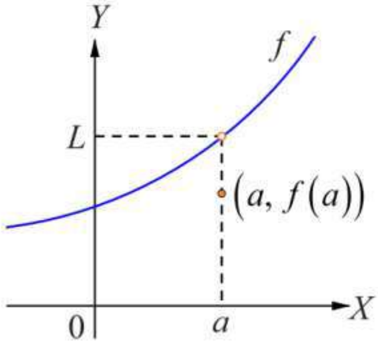
โดยทั่วไป สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้ว L อาจไม่เท่ากับ $f(a)$ ก็ได้

ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น จะพิจารณาค่าของ $f(x)$ ว่าเข้าใกล้จำนวนจริงใดในขณะที่ x เข้าใกล้ a แต่ $x \neq a$ นั่นหมายความว่า จะไม่พิจารณาค่าของ $f(x)$ ที่ $x = a$ ดังนั้น ฟังก์ชัน f อาจจะนิยามหรือไม่นิยามที่ a ก็ได้ แต่ฟังก์ชัน f จะต้องนิยามที่แต่ละจุดที่ใกล้ a

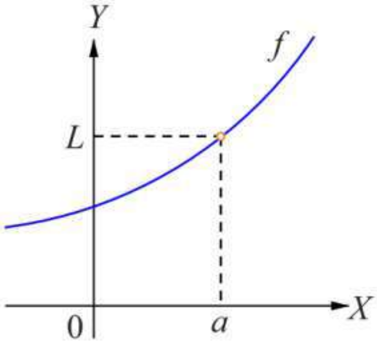
พิจารณากราฟของฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน ดังรูปที่ 3 – 5



รูปที่ 3



รูปที่ 4



รูปที่ 5

จากกราฟของฟังก์ชันในรูปที่ 3 จะได้ว่า $L = f(a)$ แต่จากกราฟของฟังก์ชันในรูปที่ 4 จะได้ว่า $L \neq f(a)$ และจากกราฟของฟังก์ชันในรูปที่ 5 จะได้ว่า $f(x)$ ไม่นิยามที่ $x = a$ ซึ่งไม่ว่า f จะเป็นฟังก์ชันที่มีกราฟดังรูปที่ 3, 4 หรือ 5 ก็จะได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ จงหา $\lim_{x \to 1} f(x)$ โดยการสร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชัน

วิธีทำ แสดงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 แต่ $x \neq 1$ ได้ดังตาราง

x	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

x	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ เข้าใกล้ 0.5 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของ 1

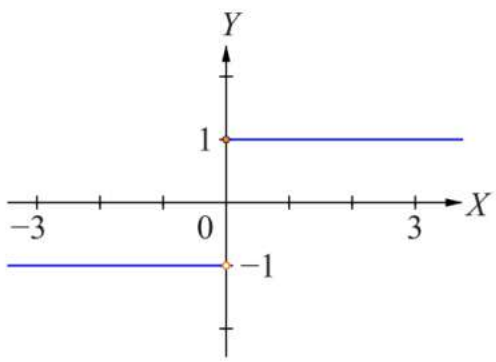
ดังนั้น $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = 0.5$ ■

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } x \geq 0 \\ -1 \text{ เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ มีค่าหรือไม่ ถ้ามีค่า จงหาลิมิต

วิธีทำ เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ได้ดังรูป



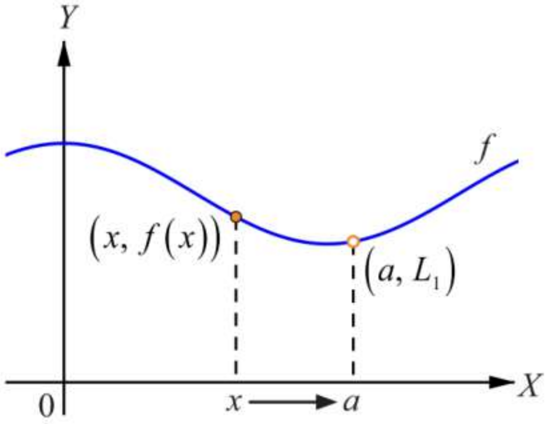
จากกราฟ พิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย $(x<0)$ จะเห็นว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ −1 แต่เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา $(x>0)$ ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 1 ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดเพียงจำนวนเดียว ซึ่งเมื่อ x เข้าใกล้ 0 แล้วทำให้ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริงนั้น ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ไม่มีค่า ในขณะที่ $f(0)=1$ ■

จากตัวอย่างที่ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย $(x<0)$ ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้ −1 เรียก −1 ว่า **"ลิมิตซ้าย (left–handed limit) ของฟังก์ชัน f"** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ โดยสัญลักษณ์ " $x \to 0^-$ " แสดงถึงการพิจารณาค่าของ x ที่น้อยกว่า 0 เท่านั้น

เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา $(x>0)$ ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้ 1 เรียก 1 ว่า **"ลิมิตขวา (right–handed limit) ของฟังก์ชัน f "** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ โดยสัญลักษณ์ " $x\to 0^+$ " แสดงถึงการพิจารณาค่าของ x ที่มากกว่า 0 เท่านั้น

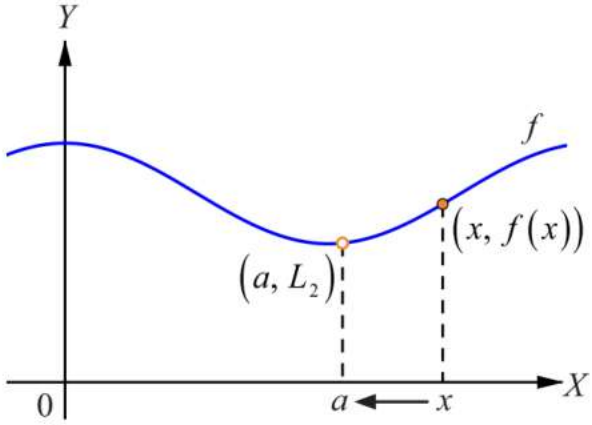
โดยทั่วไป สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายแล้ว จะเรียก L_1 ว่า **"ลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย"** เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^-} f(x)=L_1$

ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวาแล้ว จะเรียก L_2 ว่า **"ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา"** เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^+} f(x)=L_2$



$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$

รูปที่ 6



$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$

รูปที่ 7

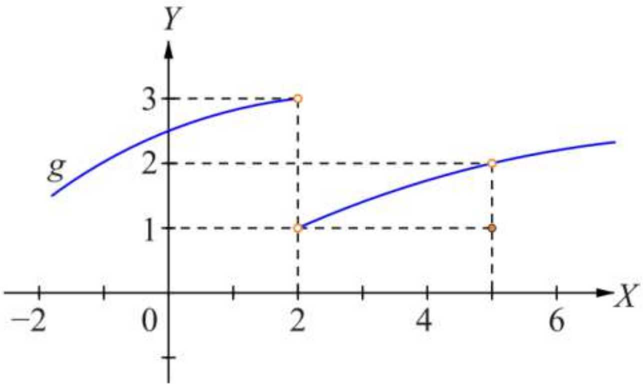
จากรูปที่ 6 และ 7 จะเห็นว่า $\lim_{x\to a^-} f(x)=L_1$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x)=L_2$

ถ้า $L_1=L_2$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x)$ มีค่า และ $\lim_{x\to a} f(x)=L_1=L_2$

แต่ถ้า $L_1\neq L_2$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดกราฟของฟังก์ชัน g ดังนี้



จงหา 1) $g(2)$ 2) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ 3) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ 4) $\lim_{x\to 2} g(x)$

5) $g(5)$ 6) $\lim_{x\to 5^-} g(x)$ 7) $\lim_{x\to 5^+} g(x)$ 8) $\lim_{x\to 5} g(x)$

วิธีทำ จากกราฟของฟังก์ชัน g จะเห็นว่า

1) เนื่องจาก $g(x)$ ไม่นิยามที่ $x=2$ ดังนั้น $g(2)$ ไม่มีค่า

2) เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย $(x<2)$ จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 3
ดังนั้น $\lim_{x\to 2^-} g(x)=3$

3) เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา $(x>2)$ จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 1
ดังนั้น $\lim_{x\to 2^+} g(x)=1$

4) เนื่องจาก $\lim_{x\to 2^-} g(x) \neq \lim_{x\to 2^+} g(x)$
ดังนั้น $\lim_{x\to 2} g(x)$ ไม่มีค่า

5) $g(5)=1$

6) เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ทางด้านซ้าย $(x<5)$ จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 2
ดังนั้น $\lim_{x\to 5^-} g(x)=2$

7) เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ทางด้านขวา $(x>5)$ จะได้ว่า ค่าของ $g(x)$ เข้าใกล้ 2
ดังนั้น $\lim_{x\to 5^+} g(x)=2$

8) เนื่องจาก $\lim_{x\to 5^-} g(x) = \lim_{x\to 5^+} g(x)=2$
ดังนั้น $\lim_{x\to 5} g(x)=2$

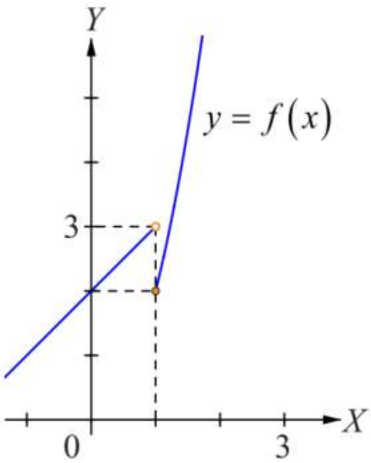
ตัวอย่างที่ 4

กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{เมื่อ } x \ge 1 \\ x+2 & \text{เมื่อ } x<1 \end{cases}$

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน f พร้อมทั้งหา

1) $f(1)$
2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
3) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
4) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

วิธีทำ เขียนกราฟของ $y=f(x)$ ได้ดังรูป



จากกราฟของ $y=f(x)$ จะเห็นว่า

1) $f(1)=2$
2) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย $(x<1)$
จะได้ว่า ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 3
ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$
3) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา $(x>1)$
จะได้ว่า ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 2
ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$
4) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ไม่มีค่า

แบบฝึกหัด 2.1ก

1. จงเติมค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ในตารางให้สมบูรณ์ พร้อมทั้งพิจารณาว่าลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อมีค่าหรือไม่ ถ้ามีค่า จงหาลิมิต

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

x	3.9	3.99	3.999
$f(x)$			

x	4.1	4.01	4.001
$f(x)$			

2) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

x	1.9	1.99	1.999
$f(x)$			

x	2.1	2.01	2.001
$f(x)$			

3) $f(x)=\dfrac{3x-3}{x^3-1}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

x	0.9	0.99	0.999
$f(x)$			

x	1.1	1.01	1.001
$f(x)$			

4) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

x	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$			

x	0.1	0.01	0.001
$f(x)$			

5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

x	-1	-0.5	-0.1	-0.05	-0.01
$f(x)$					

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01
$f(x)$					

6) $f(x)=x\ln x, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f(x)$					

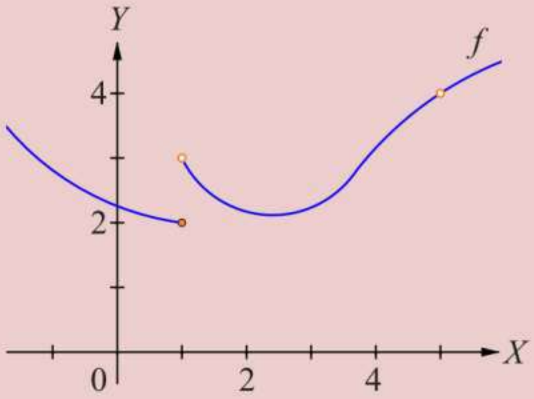
7) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+x}, \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

x	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$			

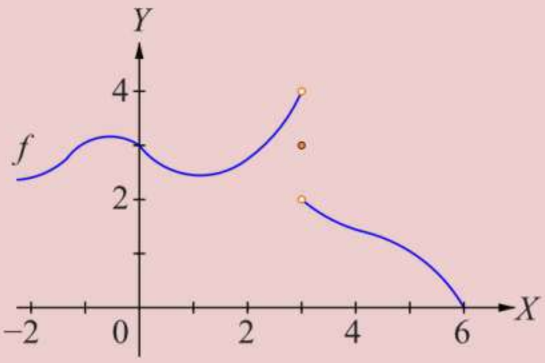
x	0.1	0.01	0.001
$f(x)$			

2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ดังรูป จงหา

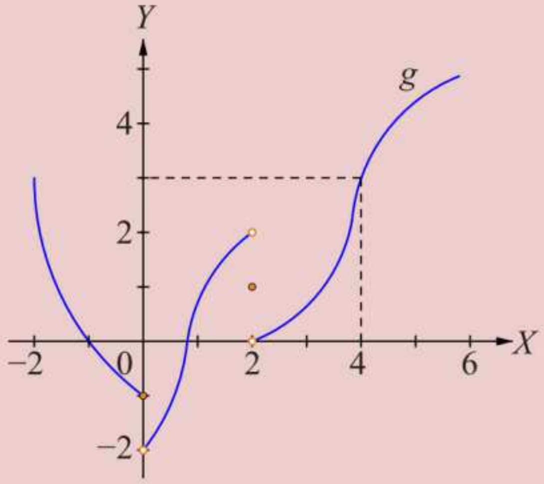
1) $f(1)$
2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
3) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
4) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
5) $f(5)$
6) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$
7) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$
8) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$



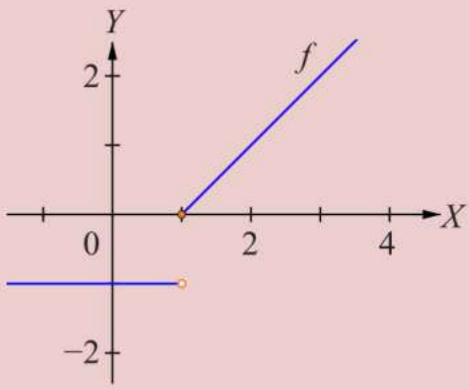
3. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ดังรูป จงหา
   1) $f(0)$
   2) $\lim_{x\to 0} f(x)$
   3) $f(3)$
   4) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$
   5) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$
   6) $\lim_{x\to 3} f(x)$



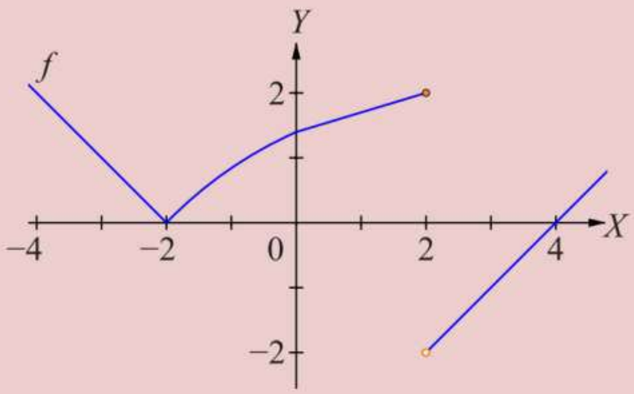
4. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน g ดังรูป จงหา
   1) $g(0)$
   2) $\lim_{x\to 0^-} g(x)$
   3) $\lim_{x\to 0^+} g(x)$
   4) $\lim_{x\to 0} g(x)$
   5) $g(2)$
   6) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$
   7) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$
   8) $\lim_{x\to 2} g(x)$
   9) $\lim_{x\to 4} g(x)$



5. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ดังรูป จงหา
   1) $f(1)$
   2) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
   3) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$
   4) $\lim_{x\to 1} f(x)$



6. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ดังรูป จงหา
   1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
   2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
   3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
   4) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$
   5) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$
   6) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$



7. จงหาลิมิตต่อไปนี้โดยพิจารณาจากกราฟของแต่ละฟังก์ชัน
   1) $\lim\limits_{x\to 4^-} (1+x)$
   2) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } x>2 \\ x+1 & \text{เมื่อ } x\le 2 \end{cases}$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

จากที่กล่าวมาข้างต้น ได้หาลิมิตของฟังก์ชันโดยการคำนวณค่าของฟังก์ชันหรือพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน โดยจะไม่แสดงการพิสูจน์ แต่จะใช้ทฤษฎีบทเหล่านี้ช่วยในการหาลิมิตของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 1

ให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$

ตัวอย่างที่ 5

จงหา

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{7}$ 2. $\lim\limits_{x\to 5}x^3$

วิธีทำ 1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

2. $\lim\limits_{x\to 5}x^3 = 5^3 = 125$

ทฤษฎีบท 2

กำหนดให้ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ และ $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$ แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)=cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=L+M$
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)=L-M$
4. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=L\cdot M$
5. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{L}{M}$ เมื่อ $M\neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^n=L^n$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$
7. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}-\{1\}, \sqrt[n]{f(x)}\in\mathbb{R}$ สำหรับ x ที่เข้าใกล้ a และ $\sqrt[n]{L}\in\mathbb{R}$

ตัวอย่างที่ 6

จงหา $\lim\limits_{x\to5}\left(2x^2-3x+4\right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to5}\left(2x^2-3x+4\right) &= \lim_{x\to5}2x^2-\lim_{x\to5}3x+\lim_{x\to5}4\\ &= 2\lim_{x\to5}x^2-3\lim_{x\to5}x+4\\ &= 2\left(5^2\right)-3(5)+4\\ &= 39\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 7

จงหา $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\left(x^3+2x^2-1\right) &= \lim_{x\to-2}x^3+2\lim_{x\to-2}x^2-\lim_{x\to-2}1\\ &= (-2)^3+2(-2)^2-1\\ &= -1\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}(5-3x) &= \lim_{x\to-2}5-3\lim_{x\to-2}x\\ &= 5-3(-2)\\ &= 11\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to-2}\left(x^3+2x^2-1\right)}{\lim\limits_{x\to-2}(5-3x)} = -\dfrac{1}{11}$

■

ตัวอย่างที่ 8

จงหา $\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)^4$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)^4 &= \left(\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)\right)^4\\ &= \left(\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1\right)^4\\ &= \left(2^2-1\right)^4\\ &= 81\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 9

จงหา $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{3x^3+20x^2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{3x^3+20x^2} &= \sqrt[3]{\lim_{x\to 4}\left(3x^3+20x^2\right)}\\ &= \left(3\lim_{x\to 4}x^3+20\lim_{x\to 4}x^2\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= \left(3\left(4^3\right)+20\left(4^2\right)\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= \left(4^3\left(3+5\right)\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= \left(4^3\cdot 2^3\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= 8\end{aligned}$$

■

ให้ $p(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\cdots+c_1x+c_0$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม
โดยใช้ทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2 ข้อ 1, 2 และ 3 จะสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3

ให้ p เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} p(x)=p(a)$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $p(x)=x^2-5x+7$ แล้ว $\lim\limits_{x\to 2} p(x)=p(2)=2^2-5(2)+7=1$

จากทฤษฎีบท 3 จะเห็นว่า ในการหาลิมิตของฟังก์ชันพหุนาม เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น สามารถหาลิมิตได้โดยการแทน x ด้วย a ในพหุนาม

โดยใช้ทฤษฎีบท 2 ข้อ 5 และทฤษฎีบท 3 จะสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} f(x)=\frac{p(a)}{q(a)}$$

สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ที่ $q(a)\neq 0$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+4}{x^2-4}$ แล้ว $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{2(1^2)-3(1)+4}{(1^2)-4}=-1$

การหา $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ โดยใช้ทฤษฎีบท 2 ข้อ 5 จะหาได้ในกรณีที่ $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ สำหรับกรณีที่ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ อาจหา $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ โดยการจัดรูปฟังก์ชันใหม่ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 10

จงหา $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

วิธีทำ ในที่นี้ $g(x) = x^2 - 1$ และ $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 0$

จะหา $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ โดยการจัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} \text{ เมื่อ } x \neq 1$$

ดังนั้น $$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$ ■

ตัวอย่างที่ 11

จงหา $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

วิธีทำ ในที่นี้ $g(x) = x^2$ และ $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

จัดรูปฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}$$

$$= \frac{(x^2+9)-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} \text{ เมื่อ } x \neq 0$$

ดังนั้น $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{6}$$ ■

ทฤษฎีบท $1-4$ ยังคงเป็นจริงเมื่อคำนวณค่าของลิมิตด้านเดียว กล่าวคือ สามารถแทน “$x \to a$” ในทฤษฎีบท $1-4$ ด้วย “$x \to a^-$” หรือ “$x \to a^+$”

การหาลิมิตของฟังก์ชันบางฟังก์ชันนั้นอาจทำได้โดยการหาลิมิตซ้ายและลิมิตขวาของฟังก์ชัน และใช้เกณฑ์การตรวจสอบ ดังนี้

> ในกรณีที่ $\lim_{x \to a^-} f(x)$ และ $\lim_{x \to a^+} f(x)$ มีค่า
> จะได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

ตัวอย่างที่ 12

กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{เมื่อ } x > 4 \\ 8-2x & \text{เมื่อ } x < 4 \end{cases}$$

จงหา $\lim_{x \to 4} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = 8-2x$ เมื่อ $x < 4$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4^-} f(x) &= \lim_{x \to 4^-} (8-2x) \\ &= 8-2(4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $f(x) = \sqrt{x-4}$ เมื่อ $x > 4$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4^+} f(x) &= \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} \\ &= \sqrt{\lim_{x \to 4^+} (x-4)} \\ &= \sqrt{4-4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = 0$

ดังนั้น $\lim_{x \to 4} f(x) = 0$ ■

ตัวอย่างที่ 13

จงหา $\lim\limits_{x \to -1} \frac{|x+1|}{x+1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $|x+1| = -(x+1)$ เมื่อ $x < -1$

จะได้ $$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} \frac{|x+1|}{x+1} &= \lim_{x \to -1^-} \frac{-(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1^-} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $|x+1| = x+1$ เมื่อ $x > -1$

จะได้ $$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^+} \frac{|x+1|}{x+1} &= \lim_{x \to -1^+} \frac{x+1}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1^+} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{|x+1|}{x+1} \neq \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{|x+1|}{x+1}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to -1} \frac{|x+1|}{x+1}$ ไม่มีค่า ■

แบบฝึกหัด 2.1ข

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2+7x-12\right)$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^5-2x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 5}x^5\left(x-2\right)$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x+3\right)\left(x^2+2\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{2x-5}$

6) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

10) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$

2. จงหาลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1) $\lim\limits_{x\to -4}\left|x+4\right|$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|x-2\right|}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{\left|x+4\right|}{x+4}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\left|x\right|}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{2x^2-3x}{\left|2x-3\right|}$

3. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & \text{เมื่อ } x\geq 2 \\ x-1 & \text{เมื่อ } x<2 \end{cases}$$

จงหาลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

4) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

5) $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$

4. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{เมื่อ } x<0 \\ x^2 & \text{เมื่อ } 0\le x\le 2 \\ 8-x & \text{เมื่อ } x>2 \end{cases}$$

จงหาลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

4) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

5) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

6) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

7) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

8) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$

5. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{เมื่อ } x\ne 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x=0 \end{cases}$$

และ $g(x)=x$ จงหาลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)$

6. กำหนดให้ $f(x)$ แทนจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x จงหาลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

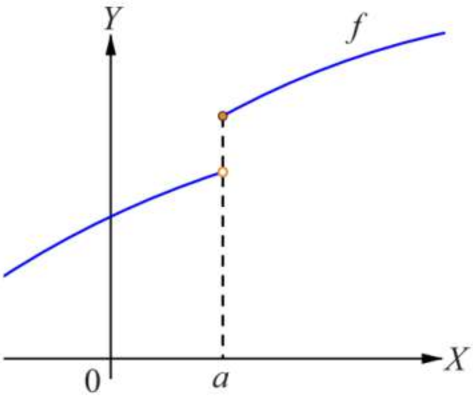
1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

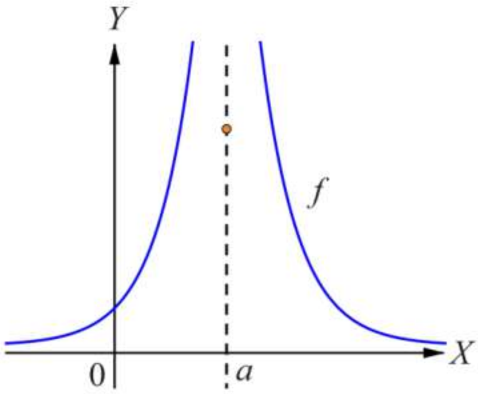
3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน f ดังรูป

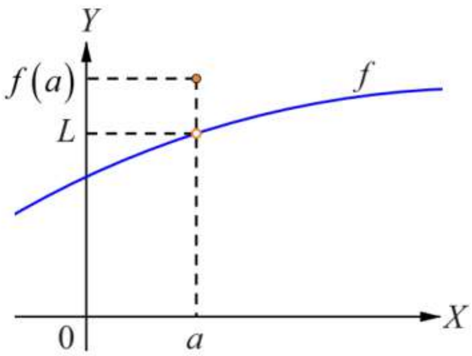


รูปที่ 8



รูปที่ 9

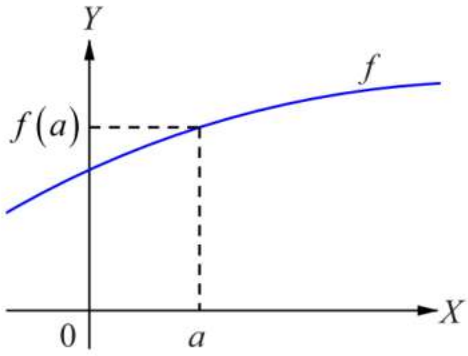
จากกราฟของฟังก์ชัน f ในรูปที่ 8 และ 9 จะเห็นว่า $f(a)$ หาค่าได้ (f นิยามที่ a) แต่ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ไม่มีค่า เนื่องจากไม่มีจำนวนจริงใด ซึ่งเมื่อ x เข้าใกล้ a แล้วทำให้ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริงนั้น



รูปที่ 10

จากกราฟของฟังก์ชัน f ในรูปที่ 10 จะเห็นว่า $f(a)$ หาค่าได้ (f นิยามที่ a) และ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ มีค่า แต่ $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

จะเรียกฟังก์ชัน f ในรูปที่ 8 – 10 ว่าเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$ แต่ถ้า $f(a) = L$ เมื่อ $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ จะได้กราฟดังนี้



รูปที่ 11

จากกราฟของฟังก์ชัน f ในรูปที่ 11 จะเห็นว่า $f(a)$ หาค่าได้ (f นิยามที่ a) และ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ในลักษณะเช่นนี้จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ ซึ่งมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 1

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงเปิด (a, b) และ $c \in (a, b)$
จะกล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function)** ที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อ
$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

จากบทนิยาม 1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$ ต้องมีสมบัติครบทั้งสามข้อดังต่อไปนี้

1. $f(c)$ หาค่าได้ (นั่นคือ c อยู่ในโดเมนของ f)
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ มีค่า
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

ตัวอย่างที่ 14

กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{เมื่อ } x\neq 2\\ 3 & \text{เมื่อ } x=2\end{cases}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

วิธีทำ จากฟังก์ชัน f ที่กำหนด

จะได้ $f(2)=3$

และ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x+2)\\ &= 4\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=2$ ■

ตัวอย่างที่ 15

กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{เมื่อ } x\neq 2\\ 4 & \text{เมื่อ } x=2\end{cases}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

วิธีทำ จากฟังก์ชัน f ที่กำหนด

จะได้ $f(2)=4$

และ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x+2)\\ &= 4\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2$ ■

ตัวอย่างที่ 16

กำหนดให้ $f(x)=|x+1|$
จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=-1$ หรือไม่

วิธีทำ จากฟังก์ชัน f ที่กำหนด จะได้ $f(-1)=|(-1)+1|=0$

จาก $f(x)=|x+1|$

จะได้ $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{เมื่อ } x\geq -1 \\ -(x+1) & \text{เมื่อ } x<-1 \end{cases}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} -(x+1) = 0$

และ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1) = 0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=-1$ ■

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยจะขอละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 5

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ แล้ว
1. $f+g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$
2. $f-g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$
3. $f\cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$
4. $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ เมื่อ $g(a)\neq 0$

ดังที่ได้ทราบมาแล้วจากทฤษฎีบท 3 ว่า ถ้า p เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$ สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ดังนั้นจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6

สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ฟังก์ชันพหุนาม p เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$

โดยใช้ทฤษฎีบท 5 และ 6 จะสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $\frac{p}{q}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนี้

ทฤษฎีบท 7

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $q(a) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 17

กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$
จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $p(x) = x^2 - 9$ และ $q(x) = x^2 - 5x + 6$

ดังนั้น $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

เนื่องจาก p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $q(0) = 6$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ ■

ความต่อเนื่องบนช่วง

ต่อไปจะให้ความหมายของความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดดังนี้

1. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a, b)
2. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ
   1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a, b) และ
   2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ และ $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
3. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(a, b]$ ก็ต่อเมื่อ
   1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a, b) และ
   2) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
4. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b)$ ก็ต่อเมื่อ
   1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a, b) และ
   2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

ตัวอย่างที่ 18

กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

จงแสดงว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-3, 3]$

วิธีทำ ให้ c เป็นจุดใด ๆ ในช่วง $(-3, 3)$

เนื่องจาก $-3 < c < 3$ จะได้ว่า $c^2 < 9$ หรือ $9 - c^2 > 0$ ดังนั้น $\sqrt{9 - c^2} > 0$

จะได้ว่า f นิยามที่ c และ $f(c) = \sqrt{9 - c^2}$

และจะได้
$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} \sqrt{9 - x^2} \\ &= \sqrt{\lim_{x \to c} (9 - x^2)} \\ &= \sqrt{9 - c^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-3, 3)$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = f(-3)$ และ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2}$

$= \sqrt{\lim\limits_{x\to -3^+} (9-x^2)}$

$= 0$

และ $f(-3) = 0$

จะได้ $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = f(-3)$

และ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2}$

$= \sqrt{\lim\limits_{x\to 3^-} (9-x^2)}$

$= 0$

และ $f(3) = 0$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-3, 3]$ ■

ตัวอย่างที่ 19

กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่

1) $(-\infty, -2)$ 2) $(2, 3]$

วิธีทำ 1) ให้ c เป็นจุดใด ๆ ในช่วง $(-\infty, -2)$

เนื่องจาก $c < -2$ จะได้ว่า $c^2 > 4$ หรือ $c^2 - 4 > 0$ ดังนั้น $\sqrt{c^2-4} > 0$

จะได้ว่า f นิยามที่ c และ $f(c) = \dfrac{1}{\sqrt{c^2-4}}$

และจะได้ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to c}(x^2-4)}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{c^2-4}}$

ดังนั้น $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, -2)$

2) ให้ c เป็นจุดใด ๆ ในช่วง $(2, 3)$

เนื่องจาก $2 < c < 3$ จะได้ว่า $4 < c^2 < 9$ หรือ $c^2 - 4 > 0$ ดังนั้น $\sqrt{c^2 - 4} > 0$

จะได้ว่า f นิยามที่ c และ $f(c) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 4}}$

และจะได้
$$\begin{aligned}\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \to c}(x^2 - 4)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - 4}}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(2, 3)$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ และ $f(3) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(2, 3]$ ■

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดหรือไม่

   1) $f(x) = 3x - 1$ ที่ $x = 0$

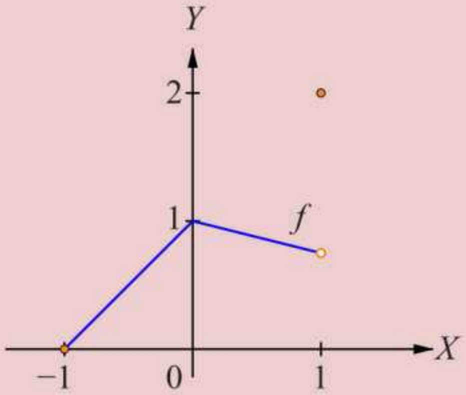
   2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{เมื่อ } x \neq 4 \\ -\frac{1}{4} & \text{เมื่อ } x = 4 \end{cases}$ ที่ $x = 4$

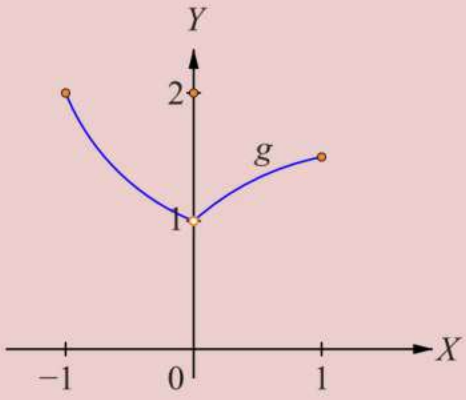
3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3-1} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ -\dfrac{2}{3} & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$ ที่ $x=1$

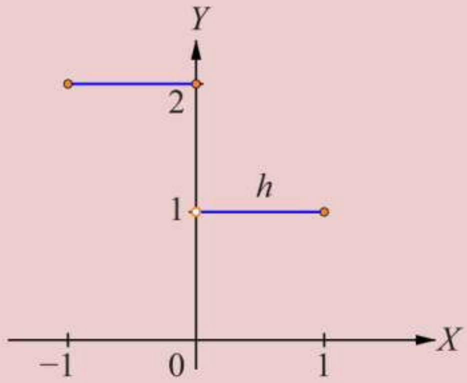
4) $f(x)=|x|$ ที่ $x=0$

5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} & \text{เมื่อ } x \neq -1 \\ -1 & \text{เมื่อ } x = -1 \end{cases}$ ที่ $x=-1$

2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f, g และ h ดังรูป จงพิจารณาว่า f, g และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดในแต่ละข้อหรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ







1) $[-1, 1]$ 2) $(-1, 1)$ 3) $[0, 1]$ 4) $(-1, 0]$

3. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{2}{x-4}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่

   1) $(-\infty, 4)$ 2) $(4, 6]$ 3) $(4, \infty)$

4. กำหนดให้ $g(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{เมื่อ } x<-2 \\ x-4 & \text{เมื่อ } -2\le x\le 1 \\ 4-x & \text{เมื่อ } x>1 \end{cases}$

   จงพิจารณาว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่

   1) $(-\infty, 1]$ 2) $(-2, 1]$ 3) $(-2, 2]$ 4) $[1, \infty)$

5. จงหา k ที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

   1) $f(x)=\begin{cases} kx^2 & \text{เมื่อ } x>1 \\ 7x-2 & \text{เมื่อ } x\le 1 \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} 2x+k & \text{เมื่อ } x>2 \\ kx^2 & \text{เมื่อ } x\le 2 \end{cases}$

2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ในการขับรถยนต์จากสถานที่หนึ่งไปยังอีกสถานที่หนึ่ง โดยทั่วไปผู้ขับไม่ได้ขับด้วยอัตราเร็วคงที่ตลอดเวลา อาจขับเร็วบ้างช้าบ้าง ขึ้นอยู่กับสภาพถนนหรือปริมาณรถบนถนน ดังนั้นการบอกอัตราเร็วจึงนิยมบอกเป็นอัตราเร็วเฉลี่ยของการเดินทางทั้งหมดหรือบอกเป็นอัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาที่สนใจ โดยอัตราเร็วเฉลี่ยคืออัตราส่วนระหว่างระยะทางที่รถยนต์เคลื่อนที่ได้ต่อช่วงเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่

ตัวอย่างเช่น ถ้าระยะทางที่รถยนต์เคลื่อนที่ได้ (มีหน่วยเป็นกิโลเมตร) เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง หาได้จาก $d(t)=20t^2$ เมื่อ $t\in[0, 2]$ จะสามารถหาอัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาที่สนใจได้ดังนี้

จากสมการที่กำหนด จะสามารถหาระยะทางที่รถยนต์เคลื่อนที่ได้ เมื่อเวลาผ่านไป 0, 0.5, 1 และ 1.5 ชั่วโมง ได้ดังตาราง

เวลาที่ผ่านไป (ชั่วโมง)	0	0.5	1	1.5
ระยะทางที่รถยนต์เคลื่อนที่ได้ (กิโลเมตร)	0	5	20	45

จะได้ระยะทางที่รถยนต์เคลื่อนที่ได้ในช่วงเวลาต่าง ๆ ดังตาราง

ช่วงเวลา (ชั่วโมง)	ระยะทางที่รถยนต์เคลื่อนที่ได้ (กิโลเมตร)
$t=0$ ถึง $t=0.5$	$5-0 = 5$
$t=0.5$ ถึง $t=1$	$20-5 = 15$
$t=1$ ถึง $t=1.5$	$45-20 = 25$

จะสามารถหาอัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาต่าง ๆ ได้ดังตาราง

ช่วงเวลา (ชั่วโมง)	อัตราเร็วเฉลี่ย (กิโลเมตรต่อชั่วโมง)
$t=0$ ถึง $t=0.5$	$\frac{5}{0.5-0}=10$
$t=0.5$ ถึง $t=1$	$\frac{15}{1-0.5}=30$
$t=1$ ถึง $t=1.5$	$\frac{25}{1.5-1}=50$

อัตราเร็วเฉลี่ยที่หาได้ข้างต้นสามารถใช้ในการพิจารณาว่า ในแต่ละช่วงเวลาที่สนใจ รถยนต์เคลื่อนที่ได้ช้าหรือเร็วเพียงใด

พิจารณาอัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้น ๆ ที่ใกล้ $t=1$ ดังตารางต่อไปนี้

ช่วงเวลา (ชั่วโมง)	อัตราเร็วเฉลี่ย (กิโลเมตรต่อชั่วโมง)
$t=1$ ถึง $t=1.1$	$\frac{d(1.1)-d(1)}{1.1-1}=42$
$t=1$ ถึง $t=1.01$	$\frac{d(1.01)-d(1)}{1.01-1}=40.2$
$t=1$ ถึง $t=1.001$	$\frac{d(1.001)-d(1)}{1.001-1}=40.02$

ถ้าให้ h เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่าอัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t=1$ ถึง $t=1+h$ คือ

$$\begin{aligned}\frac{d(1+h)-d(1)}{h} &= \frac{20(1+h)^2-20(1^2)}{h} \\ &= \frac{20(1+2h+h^2)-20}{h} \\ &= \frac{20h^2+40h+20-20}{h} \\ &= \frac{20h^2+40h}{h} \\ &= 20h+40\end{aligned}$$

นั่นคือ อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t=1$ ถึง $t=1+h$ เมื่อ $h\neq 0$ คือ $20h+40$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะเห็นว่ายิ่งช่วงเวลาสั้นลง อัตราเร็วเฉลี่ยจะยิ่งเข้าใกล้ 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น เมื่อ h น้อยลงจนเข้าใกล้ 0 จะได้ อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t=1$ ถึง $t=1+h$ คือ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{d(1+h)-d(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(20h+40)=40$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง เรียกค่านี้ว่าอัตราเร็วของรถยนต์ ณ ขณะเวลา $t=1$ ซึ่งในทางปฏิบัติ ผู้ขับรถยนต์สามารถทราบได้จากมาตรวัดอัตราเร็วบนหน้าปัดรถยนต์ ณ ขณะนั้น

ตัวอย่างข้างต้นแสดงการหาอัตราเร็วเฉลี่ย ซึ่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของระยะทางเทียบกับเวลาในช่วงเวลาที่สนใจ และการหาอัตราเร็วขณะเวลาหนึ่ง

ในกรณีทั่วไป สามารถนิยามอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยและอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง ได้ดังนี้

บทนิยาม 2

ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ a อยู่ในโดเมนของ f
อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (average rate of change) ของ f เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$ คือ

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลง (instantaneous rate of change) ของ f เทียบกับ x ขณะที่ $x=a$ คือ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ตัวอย่างที่ 20

ในการสูบลมเข้าลูกบอลลูกหนึ่ง ถ้า V เป็นปริมาตรของลมในลูกบอล (มีหน่วยเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร) และ r เป็นความยาวของรัศมีของลูกบอล (มีหน่วยเป็นเซนติเมตร) โดยที่ $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ แล้ว จงหา

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของลมในลูกบอลเทียบกับความยาวของรัศมีของลูกบอล เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก 6 เป็น 9 เซนติเมตร
2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของลมในลูกบอลเทียบกับความยาวของรัศมีของลูกบอล เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก r เป็น $r+h$ เซนติเมตร
3) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลมในลูกบอลเทียบกับความยาวของรัศมีของลูกบอล ขณะรัศมียาว 9 เซนติเมตร

วิธีทำ 1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของลมในลูกบอลเทียบกับความยาวของรัศมีของลูกบอล เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก 6 เป็น 9 เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\frac{V(9)-V(6)}{9-6} &= \frac{\frac{4}{3}\pi(9^3)-\frac{4}{3}\pi(6^3)}{3}\\ &= \frac{4}{9}\pi(9^3-6^3)\\ &= \frac{4}{9}\pi(513)\\ &= 228\pi\\ &\approx 716.3\end{aligned}$$

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของลมในลูกบอลเทียบกับความยาวของรัศมีของลูกบอล เมื่อความยาวรัศมีเปลี่ยนจาก r เป็น $r+h$ เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\frac{V(r+h)-V(r)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{4}{3}\pi(r+h)^3-\frac{4}{3}\pi r^3\right)\\ &= \frac{1}{h}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(r^3+3r^2h+3rh^2+h^3-r^3\right)\\ &= \frac{4}{3}\pi\left(3r^2+3rh+h^2\right) \text{ เมื่อ } h\neq 0\end{aligned}$$

3) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลมในลูกบอลเทียบกับความยาวของรัศมีของลูกบอล ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{V(r+h)-V(r)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{4}{3}\pi\left(3r^2+3rh+h^2\right)\\ &= \frac{4}{3}\pi\lim_{h\to 0}\left(3r^2+3rh+h^2\right)\\ &= \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\right)\\ &= 4\pi r^2\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลมในลูกบอลเทียบกับความยาวของรัศมีของลูกบอล ขณะรัศมียาว 9 เซนติเมตร คือ $4\pi(9^2)=324\pi\approx 1,017.9$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อเซนติเมตร ■

จากตัวอย่างที่ 20 อัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนจริงบวกแสดงว่าเมื่อความยาวของรัศมีของลูกบอลเพิ่มขึ้น ปริมาตรของลมในลูกบอลจะเพิ่มขึ้น

ตัวอย่างที่ 21

ในการสูบน้ำออกจากสระ หลังจากสูบน้ำไป t นาที มีน้ำเหลืออยู่ในสระ $Q(t)$ ลูกบาศก์เมตร โดยที่ $Q(t)=6-t^2$ เมื่อ $t\in[0, 2.4]$ จงหา

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของน้ำในสระเทียบกับเวลา เมื่อเวลาเปลี่ยนจาก 0 เป็น 2 นาที
2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของน้ำในสระเทียบกับเวลา เมื่อเวลาเปลี่ยนจาก t เป็น $t+h$ นาที
3) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของน้ำในสระเทียบกับเวลา ขณะเวลา 2 นาที

วิธีทำ 1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของน้ำในสระเทียบกับเวลา เมื่อเวลาเปลี่ยนจาก 0 เป็น 2 นาที คือ

$$\begin{aligned}\frac{Q(2)-Q(0)}{2-0} &= \frac{(6-2^2)-(6-0^2)}{2}\\ &= \frac{-4}{2}\\ &= -2\end{aligned}$$

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของน้ำในสระเทียบกับเวลา เมื่อเวลาเปลี่ยนจาก t เป็น $t+h$ นาที คือ

$$\begin{aligned}\frac{Q(t+h)-Q(t)}{h} &= \frac{6-(t+h)^2-(6-t^2)}{h}\\ &= \frac{6-(t^2+2th+h^2)-(6-t^2)}{h}\\ &= \frac{6-t^2-2th-h^2-6+t^2}{h}\\ &= \frac{-2th-h^2}{h}\\ &= -2t-h \text{ เมื่อ } h\neq 0\end{aligned}$$

3) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของน้ำในสระเทียบกับเวลา ขณะเวลา t นาที คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{Q(t+h)-Q(t)}{h} &= \lim_{h\to 0}(-2t-h)\\ &= -2t\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของน้ำในสระเทียบกับเวลา ขณะเวลา 2 นาที คือ $(-2)(2)=-4$ ลูกบาศก์เมตรต่อนาที ■

จากตัวอย่างที่ 21 อัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นจำนวนจริงลบแสดงว่าเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ปริมาตรของน้ำในสระจะลดลง

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชัน f ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x เป็นจำนวนจริงบวก แสดงว่าเมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้น แต่ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x เป็นจำนวนจริงลบ แสดงว่าเมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะลดลง

จากบทนิยาม 2 ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ a อยู่ในโดเมนของ f จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x ขณะที่ $x=a$ คือ $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ จะเรียกค่าของลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ a ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3

ให้ f เป็นฟังก์ชัน **อนุพันธ์ (derivative) ของฟังก์ชัน** f **ที่** x เขียนแทนด้วย $f'(x)$ คือ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ถ้า $f'(x)$ มีค่า จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ x หรือฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ x

ถ้า $f'(x)$ ไม่มีค่า จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f ไม่มีอนุพันธ์ที่ x หรือฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x

นอกจากสัญลักษณ์ $f'(x)$ แล้วยังมีสัญลักษณ์อื่น ๆ ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เช่น เมื่อกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยสมการ $y=f(x)$ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ (อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์) หรือ $\frac{d}{dx}f(x)$ หรือ y'

ดังนั้น $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = y' = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

หมายเหตุ $\frac{dy}{dx}$ ไม่ได้หมายถึง เศษส่วนที่มีตัวเศษ คือ d คูณ y และตัวส่วน คือ d คูณ x และ $\frac{dy}{dx}$ ไม่ได้หมายถึง dy หารด้วย dx

ตัวอย่างที่ 22

กำหนดให้ $f(x)=5x^2+3x-1$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(5(x+h)^2+3(x+h)-1\right)-\left(5x^2+3x-1\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{10xh+5h^2+3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(10x+5h+3) \\
&= 10x+3
\end{aligned}
$$

■

จากตัวอย่างที่ 22 อาจเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ของอนุพันธ์แบบอื่นได้ เช่น

$$\frac{dy}{dx}=10x+3 \text{ หรือ } \frac{d}{dx}f(x)=10x+3 \text{ หรือ } y'=10x+3$$

ตัวอย่างที่ 23

กำหนดให้ $y(t)=7-2t$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(7-2(t+h))-(7-2t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(-2)\\ &= -2\end{aligned}$$

■

เนื่องจาก $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ
ดังนั้น สำหรับ a ใด ๆ ที่อยู่ในโดเมนของ f อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x=a$
คือ $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
อาจใช้สัญลักษณ์ $\frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=a}$ หรือ $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$ แทน $f'(a)$

ตัวอย่างที่ 24

กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{x+1}$ จงหา $f'(3)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}f'(3) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{h+4}-2}{h}\cdot\frac{\sqrt{h+4}+2}{\sqrt{h+4}+2}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to 0}\frac{(h+4)-4}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h+4}+2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

■

ตัวอย่างที่ 25

กำหนดให้ $f(x)=|x|$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x=0$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{|h|-|0|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}1 = 1$

และ $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}(-1) = -1$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|h|}{h} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|h|}{h}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|h|}{h}$ ไม่มีค่า

นั่นคือ $f'(0)$ ไม่มีค่า

■

แบบฝึกหัด 2.3

1. ให้ $y = 2x^2 - 3$ จงหา
   1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.2
   2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.1
   3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.01
   4) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 2$

2. ให้ $y = \frac{1}{x}$ จงหา
   1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก 4 เป็น 5
   2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก 4 เป็น 4.1
   3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก 4 เป็น 4.01
   4) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 4$

3. จงหา
   1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่วงกลมเทียบกับความยาวของรัศมี เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก r เป็น $r + h$ เซนติเมตร
   2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่วงกลมเทียบกับความยาวของรัศมี ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร

4. จงหา
   1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวด้าน เมื่อความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเปลี่ยนจาก 10 เป็น 12 เซนติเมตร
   2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวด้าน ขณะด้านยาว 10 เซนติเมตร

5. จงหา
   1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวด้าน เมื่อความยาวด้านเปลี่ยนจาก 10 เป็น 9 เซนติเมตร
   2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับความยาวด้าน ขณะด้านยาว 10 เซนติเมตร

6. ใส่สารหนึ่งลงในน้ำยา หลังจากเวลาผ่านไป t นาที สามารถหาปริมาณของสาร (มีหน่วยเป็นกรัม) ได้จาก $N=\frac{8}{t+1}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะที่ $t=3$

7. ขณะเริ่มต้น กระบอกสูบบรรจุอากาศ 400 ลูกบาศก์เซนติเมตร และอากาศภายในมีความดัน 15 นิวตันต่อตารางเซนติเมตร ขณะที่กดลูกสูบลง เมื่ออุณหภูมิมีค่าคงตัว ปริมาตรจะลดลง และความดันจะเพิ่มขึ้น ตามสมการ $PV=6{,}000$ เมื่อ P แทนความดัน และ V แทนปริมาตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ P เทียบกับ V ขณะที่ $V=100$

8. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยกลมตรง
   1) เทียบกับความยาวของรัศมีของฐาน ขณะรัศมียาว r หน่วย เมื่อส่วนสูงคงตัว
   2) เทียบกับส่วนสูง ขณะส่วนสูงยาว h หน่วย เมื่อความยาวของรัศมีของฐานคงตัว

9. ประจุไฟฟ้าสองประจุอยู่ห่างกัน r เมตร และขนาดของแรงระหว่างประจุไฟฟ้า F นิวตัน เป็นไปตามสมการ $F=\frac{k}{r^2}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวที่มากกว่าศูนย์ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ F เทียบกับ r ขณะที่ r เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0

10. ในการหย่อนปะการังเทียมจากเฮลิคอปเตอร์ลงทะเลแห่งหนึ่ง ถ้า $s(t)$ แทนความสูงของปะการังเทียมจากระดับน้ำทะเล (มีหน่วยเป็นเมตร) ณ เวลา t (มีหน่วยเป็นวินาที) จงอธิบายความหมายของสมการ $s(5) = 0$ และ $s'(5) = -27$

เสริมสมอง : ปะการังเทียม



ปะการังเทียมเป็นเครื่องมือในการอนุรักษ์ทรัพยากรสัตว์น้ำ โดยสร้างขึ้นเลียนแบบบริเวณที่มีสัตว์น้ำชุกชุม เพื่อดัดแปลง ปรับปรุง หรือเสริมแต่งสภาพพื้นที่ท้องทะเลให้เหมาะสมกับรูปแบบที่สัตว์น้ำชอบอยู่อาศัย ปะการังเทียมทำหน้าที่คล้าย ๆ กับแนวหินหรือแนวปะการังที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติ โดยการสร้างปะการังเทียมนั้นจะนำวัสดุที่แข็งแรง ทนทาน และสามารถต้านกระแสน้ำได้ไปวางรวมกันเป็นกลุ่มอย่างมีแบบแผน เพื่อดึงดูดสัตว์น้ำให้เข้ามาอยู่อาศัย หลบภัย และมีโอกาสแพร่พันธุ์มากขึ้น วัสดุที่สามารถนำมาสร้างเป็นปะการังเทียม ได้แก่ ก้อนหิน กิ่งไม้ ทางมะพร้าว รถยนต์ ตู้รถไฟ เรือรบ เรือสินค้า เครื่องบิน รถถัง ฐานขุดเจาะน้ำมัน รวมถึงคอนกรีตที่เป็นก้อนหรือแท่งคอนกรีตเสริมเหล็กในรูปแบบต่าง ๆ เป็นต้น

11. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = 3x^2$

2) $f(x) = x^3$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$

4) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

12. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้

1) $f(x) = x^2 - x$ ที่จุดซึ่ง $x = 0$

2) $f(x) = 2x^3 + 1$ ที่จุดซึ่ง $x = 2$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ที่จุดซึ่ง $x = -1$

2.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยาม 3 ในรูปของลิมิตนั้นค่อนข้างยุ่งยาก ในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันง่าย ๆ บางฟังก์ชันโดยใช้บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.1 แล้วสรุปเป็นสูตรดังนี้

สูตรที่ 1 ถ้า $f(x)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $f'(x)=0$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 26

กำหนดให้ $y=-5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ เนื่องจาก $y = -5$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-5)$

$= 0$ ■

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x)=x$ แล้ว $f'(x)=1$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

สูตรที่ 3 ถ้า $f(x)=x^a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง แล้ว $f'(x)=ax^{a-1}$

พิสูจน์ จะแสดงเฉพาะกรณีที่ $a=n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+\binom{n}{n}h^n-x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

หมายเหตุ ในกรณีที่ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ต้องใช้แคลคูลัสระดับสูงในการพิสูจน์สูตรที่ 3

ตัวอย่างที่ 27

กำหนดให้ $f(x)=x^5$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^5$

จะได้
$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

■

ตัวอย่างที่ 28

กำหนดให้ $y=\frac{1}{x^3}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ เนื่องจาก $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

จะได้
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

■

ตัวอย่างที่ 29

กำหนดให้ $y=\sqrt{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ เนื่องจาก $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

จะได้
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

■

สูตรที่ 4 ถ้าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

พิสูจน์ ให้

$$\begin{aligned}
F(x) &= f(x)+g(x) \\
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)+g(x+h)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)+\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 30

กำหนดให้ $y = x^4 + x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก

$$y = x^4 + x^2$$

จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^4+x^2\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(x^4\right)+\frac{d}{dx}\left(x^2\right) \\
&= 4x^3+2x
\end{aligned}$$

■

สูตรที่ 5 ฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$$

พิสูจน์ ทำนองเดียวกับการพิสูจน์สูตรที่ 4

ข้อสังเกต จากสูตรที่ 4 และสูตรที่ 5 จะได้ว่า ถ้า $y=f(x)+g(x)-h(x)$ และสามารถหา $f'(x), g'(x)$ และ $h'(x)$ ได้ แล้ว $\frac{dy}{dx}=f'(x)+g'(x)-h'(x)$ นั่นคือ จะขยายจำนวนฟังก์ชันที่บวกและลบกันเป็นกี่ฟังก์ชันก็ได้

ตัวอย่างที่ 31

กำหนดให้ $y=x^6+x^3-x^2+4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^6+x^3-x^2+4$

จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^6+x^3-x^2+4\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(x^6\right)+\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}(4)\\ &= 6x^5+3x^2-2x+0\\ &= 6x^5+3x^2-2x\end{aligned}$$

■

สูตรที่ 6 ถ้า c เป็นค่าคงตัว และฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $(cf)'(x) = c(f'(x))$

พิสูจน์ ให้

$$\begin{aligned} F(x) &= cf(x) \\ F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= c(f'(x)) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 32

กำหนดให้ $y = 5x^2 - 3x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = 5x^2 - 3x$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x^2 - 3x) \\ &= \frac{d}{dx}(5x^2) - \frac{d}{dx}(3x) \\ &= 5\frac{d}{dx}(x^2) - 3\frac{d}{dx}(x) \\ &= 5(2x) - 3(1) \\ &= 10x - 3 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 33

กำหนดให้ $f(x)=8x^3-2x^2+5x-7$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 8x^3-2x^2+5x-7$

จะได้
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(8x^3-2x^2+5x-7\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(8x^3\right)-\frac{d}{dx}\left(2x^2\right)+\frac{d}{dx}(5x)-\frac{d}{dx}(7) \\
&= 8\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-2\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+5\frac{d}{dx}(x)-0 \\
&= 8\left(3x^2\right)-2(2x)+5(1) \\
&= 24x^2-4x+5
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(1) = 24\left(1^2\right)-4(1)+5 = 25$ ■

ตัวอย่างที่ 34

กำหนดให้ $f(x) = 2x^3-4x^2$ จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $f'(x)=0$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^3-4x^2$

จะได้
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(2x^3-4x^2\right) \\
&= 6x^2-8x
\end{aligned}$$

ให้ $f'(x) = 0$

จะได้ $6x^2-8x = 0$

หรือ $2x(3x-4) = 0$

นั่นคือ $x=0$ หรือ $x=\frac{4}{3}$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0$ หรือ $x=\frac{4}{3}$ ■

สูตรที่ 7 ถ้าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $(fg)(x) = f(x)\cdot g(x)$ จะได้

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 35

กำหนดให้ $y=(x^2-2x+3)(2x+5)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = (x^2-2x+3)(2x+5)$

จะได้
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left((x^2-2x+3)(2x+5)\right) \\
&= (x^2-2x+3)\frac{d}{dx}(2x+5)+(2x+5)\frac{d}{dx}(x^2-2x+3) \\
&= (x^2-2x+3)(2+0)+(2x+5)(2x-2+0) \\
&= 2x^2-4x+6+4x^2+6x-10 \\
&= 6x^2+2x-4
\end{aligned}$$

■

สูตรที่ 8 ถ้าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $g(x) \neq 0$ แล้ว

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

จะได้

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\left(g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) - \left(f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{g(x)\cdot g(x+h)}\right) \\
&= \frac{g(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)} \\
&= \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 36

กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$

จะได้
$$f'(x) = \frac{(2x+1)\frac{d}{dx}(2x-1)-(2x-1)\frac{d}{dx}(2x+1)}{(2x+1)^2}$$
$$= \frac{(2x+1)(2-0)-(2x-1)(2+0)}{(2x+1)^2}$$
$$= \frac{4x+2-4x+2}{(2x+1)^2}$$
$$= \frac{4}{(2x+1)^2}$$

■

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y=-3$

2) $y=x^3+\dfrac{x}{3}$

3) $y=x^3-3x+7$

4) $y=-5x^2+x+2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5) $s=4t^5-3t^2+t-8$

6) $s=\left(4t^2+t-1\right)(t+2)$

7) $y=x(x+1)(x+2)$

8) $y=\left(4x-x^2\right)\left(x^2+3\right)$

9) $y=x\left(x^2+1\right)$

10) $y=\dfrac{x^3+2}{x}$

11) $y=\frac{3}{3x^2+1}$

12) $y=\frac{1+3x}{1-3x}$

13) $s=t\left(12-\frac{1}{t^2}\right)$

14) $y=\frac{x^5-3x^2+5x-2}{x^2}$

15) $s=\frac{5t^6+t-3}{\sqrt{t}}$

16) $y=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(3x^3+27\right)$

17) $y=\frac{4x+1}{x^2-5}$

18) $y=\left(\frac{3x+2}{x}\right)\left(x^{-5}+1\right)$

19) $y=\frac{3}{\sqrt{x}+2}$

20) $y=\left(2x^7-x^2\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้

1) $f(x)=2x^3-\frac{1}{\sqrt{x}}$ ที่จุดซึ่ง $x=1$

2) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x+5$ ที่จุดซึ่ง $x=1$

3) $f(x)=\left(2x^2-3x+1\right)\left(x-x^2\right)$ ที่จุดซึ่ง $x=-1$

4) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ ที่จุดซึ่ง $x=2$

3. กำหนดให้ $f(4)=3$ และ $f'(4)=-5$ จงหา $g'(4)$ เมื่อ

1) $g(x)=\sqrt{x}f(x)$

2) $g(x)=\frac{f(x)}{x}$

4. กำหนดให้ $f(2)=1, f'(2)=-1, g(2)=2$ และ $g'(2)=0$ จงหา $F'(2)$ เมื่อ

1) $F(x)=2f(x)+4g(x)$

2) $F(x)=\frac{f(x)+3g(x)}{g(x)}$

5. จงหาพหุนามดีกรีสอง $P(x)=ax^2+bx+c$ ที่ $P(1)=1, P'(1)=-1$ และ $P'(0)=-3$

6. ในงานมหกรรมลดราคาไทยช่วยไทย ร้านขายสินค้าหัตถกรรมจากย่านลิเภาร้านหนึ่ง ได้บันทึกปริมาณสินค้าคงเหลือ (มีหน่วยเป็น 100 ชิ้น) ซึ่งสามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชัน $s(x)=\dfrac{3x+145}{x+8}$ เมื่อ x แทนจำนวนวันตั้งแต่เริ่มต้นงานมหกรรมลดราคา
   1) จงหาจำนวนสินค้า ณ เวลาเริ่มต้นมหกรรมลดราคา
   2) จงหาจำนวนสินค้าคงเหลือและอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าในวันที่ 10
   3) จงหาจำนวนสินค้าคงเหลือและอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าในวันที่ 15
   4) จงหาจำนวนสินค้าคงเหลือและอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนสินค้าในวันที่ 25
   5) จงอธิบายการขายสินค้าของร้านนี้

7. ในปีนี้บริษัทขายสินค้าชนิดหนึ่งในราคาชิ้นละ 250 บาท โดยขายได้ 200,000 ชิ้น ถ้าในปีต่อ ๆ ไป บริษัทตั้งราคาขายสูงขึ้นปีละ 10 บาท จะขายสินค้าได้น้อยลงปีละ 6,000 ชิ้น จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรายรับรวมที่ได้จากการขายสินค้าชนิดนี้ในปีที่ 3

2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ ซึ่งเรียกกฎในการหาอนุพันธ์นี้ว่า **กฎลูกโซ่ (chain rule)**

สูตรที่ 9 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้ว

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

จากสูตรที่ 9 สามารถเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่ง ดังนี้
ถ้าให้ $u = f(x)$ และให้ $y = (g \circ f)(x)$ จะได้ว่า $y = g(f(x)) = g(u)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (g \circ f)'(x) \\
&= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\
&= g'(u) \cdot f'(x) \\
&= \frac{d}{du} g(u) \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

นั่นคือ ถ้า y เป็นฟังก์ชันของ u และ u เป็นฟังก์ชันของ x และหา $\frac{dy}{du}$ และ $\frac{du}{dx}$ ได้ แล้ว $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 37

กำหนดให้ $f(x) = (2x-1)^5$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ ให้ $u = 2x - 1$

ดังนั้น $y = f(x) = (2x-1)^5 = u^5$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{d}{du}(u^5) \cdot \frac{d}{dx}(2x-1) \\
&= (5u^4)(2) \\
&= 10(2x-1)^4
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 10(2x-1)^4$ ■

ตัวอย่างที่ 38

ให้ $y = \sqrt{1-3x^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u = 1-3x^2$

ดังนั้น $y = \sqrt{1-3x^2} = u^{\frac{1}{2}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(1-3x^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)(-6x) \\ &= \frac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 39

ให้ $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2-1}}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $u = 2x^2-1$

ดังนั้น $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{u}} = u^{-\frac{1}{3}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}\left(u^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(2x^2-1\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\right)(4x) \\ &= \frac{-4x}{3\sqrt[3]{\left(2x^2-1\right)^4}}\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 40

ให้ $F(x)=f(g(x))$ และ $f(x)=x\cdot g(x)$ จงหา $F'(3)$ เมื่อ $g(1)=3$, $g(3)=1$, $g'(1)=4$ และ $g'(3)=5$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x\cdot g(x)$

โดยสูตรที่ 7 จะได้
$$f'(x) = x\cdot\frac{d}{dx}(g(x))+g(x)\cdot\frac{d}{dx}(x) = x\cdot g'(x)+g(x)$$

เนื่องจาก $F(x) = f(g(x))$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้
$$\begin{aligned} F'(3) &= f'(g(3))\cdot g'(3) \\ &= f'(1)\cdot 5 \\ &= (1\cdot g'(1)+g(1))(5) \\ &= (1(4)+3)(5) \\ &= 35 \end{aligned}$$

■

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y=(2x+3)^5$
2) $y=(1-3x)^3$
3) $y=(3-4x^2)^4$
4) $y=(2-3x+4x^2)^3$
5) $y=(x^3-2x)^4$
6) $y=\sqrt{1-2x}$
7) $y=\sqrt{3x^2+2}$
8) $y=\sqrt[3]{x^2-3}$
9) $s=(2t^2-1)^{-3}$
10) $s=\dfrac{1}{(t^2-3t+2)^2}$
11) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$
12) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+3}}$

13) $y=(x-3)^3(2x+1)$

14) $y=\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)^3$

15) $y=\frac{(2x+3)^3}{(4x^2-1)^8}$

2. กำหนดให้ $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ และ $g(x)=\sqrt{3x-1}$ จงหา $F'(x)$ เมื่อ $F(x)=f(g(x))$

3. กำหนดให้ $F(x)=f(g(x))$ จงหา $F'(2)$ เมื่อ $g(2)=4,\ g'(2)=5,\ f'(2)=6$ และ $f'(4)=9$

4. กำหนดให้ $F(x)=f(g(x))$ และ $f(x)=\frac{g(x)}{x}$ จงหา $F'(2)$ เมื่อ $g(2)=3,\ g(3)=2,$ $g'(2)=9$ และ $g'(3)=8$

5. กำหนดให้ $x(t)=\frac{300t^2}{1+t^2}$ และ $P(x)=2\sqrt{x}-20$ จงหา

   1) $\frac{dx}{dt}$ และ $\frac{dP}{dx}$

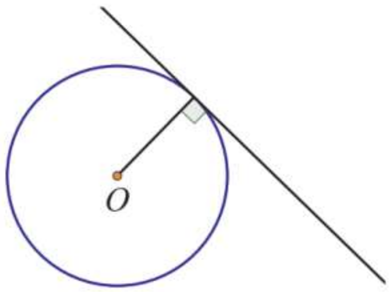
   2) $\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=2}$

6. ถ้าจำนวนแบคทีเรียที่พบในชั่วโมงที่ t (มีหน่วยเป็นเซลล์) หาได้จาก $N(t)=(t+10)^5$ จงหา $\frac{dN}{dt}$ พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

7. วนิดาฝากเงิน 1 ล้านบาท เพื่อเป็นทุนการศึกษาของหลานสาว ถ้าธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ย $r\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อฝากเงินครบ 18 ปี จำนวนเงินในบัญชีของวนิดาหาได้จาก $A(r)=10^6\left(1+\frac{r}{1,200}\right)^{216}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนเงินในบัญชีของวนิดา เทียบกับอัตราดอกเบี้ย ขณะอัตราดอกเบี้ยเป็น 1.5%, 2.5% และ 3% ต่อปี

2.6 เส้นสัมผัสเส้นโค้ง

จากที่ทราบมาแล้วว่าเส้นสัมผัสของวงกลมย่อมตั้งฉากกับรัศมีซึ่งลากมายังจุดสัมผัส ดังรูปที่ 12

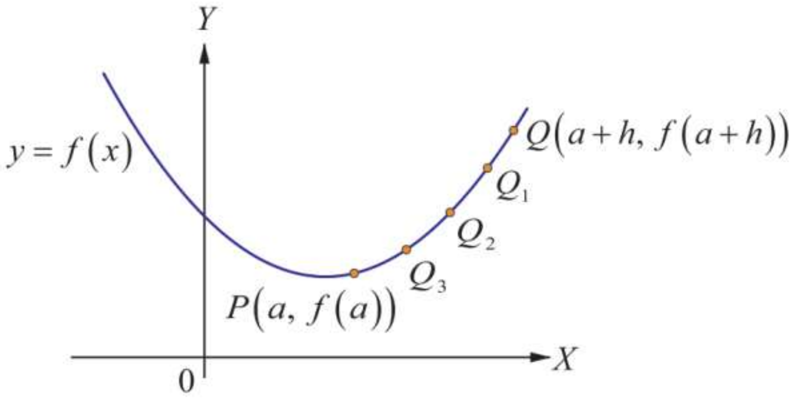


รูปที่ 12

สำหรับเส้นโค้งใด ๆ จะสามารถหาเส้นสัมผัสได้ดังนี้
กำหนดเส้นโค้งซึ่งเป็นกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$
ให้ $P(a, f(a))$ และ $Q(a+h, f(a+h))$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง โดยที่ $h \neq 0$

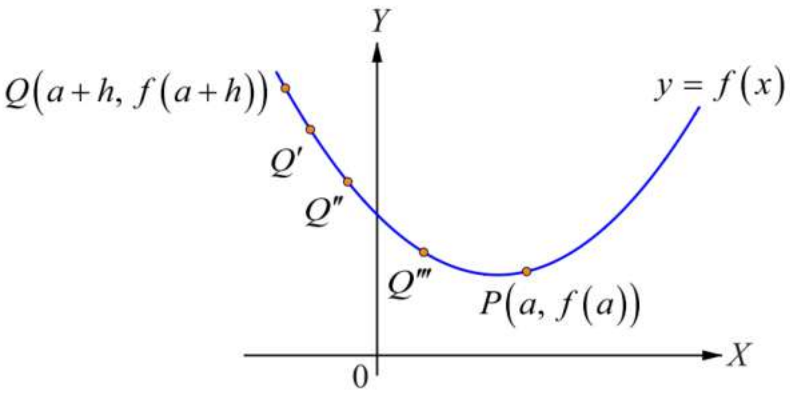
ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q คือ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ซึ่งคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$

กรณี $h > 0$ เมื่อ h เข้าใกล้ 0 พิจารณาจุด $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่เข้าใกล้จุด P ทางขวา มากขึ้นเรื่อย ๆ ดังรูปที่ 13



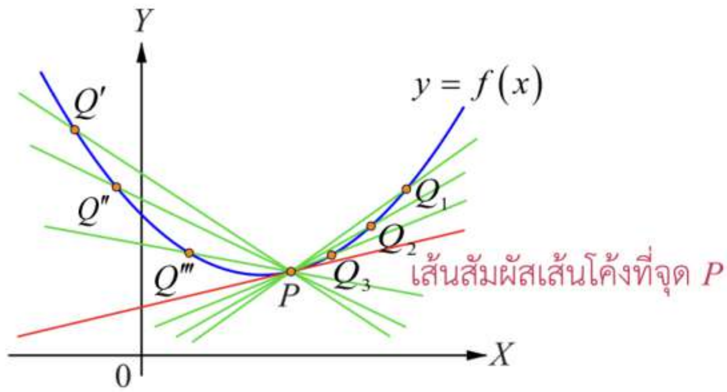
รูปที่ 13

กรณี $h<0$ เมื่อ h เข้าใกล้ 0 พิจารณาจุด $Q', Q'', Q''', \ldots$ บนเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่เข้าใกล้จุด P ทางซ้าย มากขึ้นเรื่อย ๆ ดังรูปที่ 14



รูปที่ 14

จะได้ว่า เส้นตรง $PQ_1, PQ_2, PQ_3, \ldots$ และ เส้นตรง $PQ', PQ'', PQ''', \ldots$ จะเข้าใกล้เส้นตรงหนึ่งเส้น ซึ่งผ่านจุด P เรียกเส้นตรงเส้นนี้ว่า **เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด** P ดังรูปที่ 15



รูปที่ 15

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P จะเท่ากับ $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ซึ่งคือ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x=a$ หรือ $f'(a)$

บทนิยาม 4

กำหนดเส้นโค้งซึ่งเป็นกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ และจุด $P(a, f(a))$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง **เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด** $P(a, f(a))$ คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $f'(a)$ จะเรียกความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ว่า **ความชันของเส้นโค้งที่จุด** P

ตัวอย่างที่ 41

จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = \frac{1}{x}$ ที่จุด $\left(3, \frac{1}{3}\right)$

วิธีทำ จาก $y = f(x) = \frac{1}{x}$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)$

$= (-1)x^{-2}$

$= -\frac{1}{x^2}$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ คือ $f'(3) = -\frac{1}{9}$ ■

ตัวอย่างที่ 42

กำหนดสมการวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ จงหา

1) ความชันของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $(-3, 4)$
2) สมการของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $(-3, 4)$

วิธีทำ 1) จาก $x^2 + y^2 = 25$

จะได้ $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

เนื่องจากจุดที่ต้องการหาความชันคือจุด $(-3, 4)$

ดังนั้น ต้องใช้สมการ $y = \sqrt{25 - x^2}$

ให้ $u = 25 - x^2$

ดังนั้น $y = u^{\frac{1}{2}}$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(25 - x^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)(-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $(-3, 4)$ คือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-3} = \frac{-(-3)}{\sqrt{25-(-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$

2) สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน m คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

เนื่องจากเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $(-3, 4)$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3, 4)$

และมีความชัน $\frac{3}{4}$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $(-3, 4)$ คือ $y - 4 = \frac{3}{4}\left(x - (-3)\right)$

หรือ $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ ■

หมายเหตุ นักเรียนอาจหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้นที่ได้ศึกษามาแล้ว ซึ่งจะได้คำตอบเป็นสมการเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 43

จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = x^3 - 12x$ ทั้งหมดที่ทำให้เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดเหล่านี้ขนานกับแกน X

วิธีทำ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 12x$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 12x\right) = 3x^2 - 12$$

ต้องการให้เส้นสัมผัสเส้นโค้งขนานกับแกน X นั่นคือ เส้นสัมผัสเส้นโค้งต้องมีความชันเป็นศูนย์

จะได้ $3x^2 - 12 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

ดังนั้น $x = 2$ หรือ $x = -2$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = \left(2^3\right) - (12)(2) = -16$

และเมื่อ $x = -2$ จะได้ $y = (-2)^3 - (12)(-2) = 16$

ดังนั้น จุดบนเส้นโค้งที่เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นขนานกับแกน X คือ จุด $(-2, 16)$ และ $(2, -16)$ ■

ตัวอย่างที่ 44

จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ ที่ $x = 4$

วิธีทำ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

เมื่อ $x = 4$ จะได้ $y = \sqrt{4} = 2$ และ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

นั่นคือ เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $x = 4$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, 2)$ และมีความชันเป็น $\frac{1}{4}$
ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $x = 4$ คือ

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

หรือ $$4y - 8 = x - 4$$

หรือ $$x - 4y + 4 = 0$$

■

แบบฝึกหัด 2.6

1. จงหาความชันของเส้นโค้งต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้ และหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดนั้น
   1) $y = x^2 - 3x$ ที่จุด $(3, 0)$
   2) $y = 5x^2 - 6$ ที่จุด $(2, 14)$
   3) $y = x - x^2$ ที่จุดซึ่ง $x = \frac{1}{2}$
   4) $y = \frac{x^2 + 2}{x}$ ที่จุดซึ่ง $x = 1$
   5) $y = \sqrt[3]{3x^2 - 4}$ ที่จุด $(-2, 2)$
   6) $y = \frac{5}{\left(x^2 - x - 1\right)^2}$ ที่จุด $\left(3, \frac{1}{5}\right)$

2. ถ้ากราฟของ $y = ax$ ขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 3x^2 + 8$ ที่จุด $(1, 11)$ แล้ว จงหา a

3. จงเขียนตัวอย่างของเส้นตรง ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 และกราฟของฟังก์ชัน f, g และ h บนช่วง $[-2, 2]$ บนระบบพิกัดฉากที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้
   1) ℓ_1 สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(-1, 2)$ และ ℓ_1 ตัดกับเส้นโค้ง $y = f(x)$ หนึ่งจุด ที่จุด $(1, 1)$
   2) ℓ_2 เป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 0 โดยที่ ℓ_2 สัมผัสเส้นโค้ง $y = g(x)$ ที่จุดสองจุด และตัดกับเส้นโค้ง $y = g(x)$ ที่จุดหนึ่งจุด
   3) ℓ_3 สัมผัสเส้นโค้ง $y = h(x)$ ที่จุดหนึ่งจุดในช่วง $[-2, -1)$ และสัมผัสที่ทุกจุดในช่วง $(-1, 1)$ แต่ตัดกับเส้นโค้ง $y = h(x)$ ที่จุดสองจุดในช่วง $(1, 2]$

4. กำหนดสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด $(2, 5)$ คือ $3x-y=1$ จงหา $f'(2)$

5. กำหนดให้ $f(3)=-1$ และ $f'(3)=5$ จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่ $x=3$

6. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งมีความชันเป็น 3 และสัมผัสเส้นโค้ง $y=-x+x^2$ ที่จุด (a, b) แล้ว จงหา a และ b

7. ถ้าเส้นตรง $y=mx+c$ ขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=3x^2-5$ ที่จุด $(1, -2)$ แล้ว จงหา m และ c

8. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 3)$ และขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=x^3$ ที่จุด $(1, 1)$

9. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y=x^3-3x$ ทั้งหมดที่ทำให้เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดเหล่านี้ขนานกับแกน X

10. จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเป็น $\frac{1}{2}$ และสัมผัสเส้นโค้ง $y=x^4$

11. จงหา a และ b ที่ทำให้เส้นตรง $4x+y=b$ สัมผัสเส้นโค้ง $y=ax^2$ ที่ $x=2$

2.7 อนุพันธ์อันดับสูง

จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในหัวข้อที่ผ่านมา จะพบว่า ถ้าให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้วจะได้ $y=f'(x)$ เป็นฟังก์ชันเช่นกัน ซึ่งจะสามารถนำฟังก์ชัน f' ไปหาอนุพันธ์ต่อได้อีก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 45

กำหนดให้ $f(x)=5x^3-6x^2+2x-3$

1) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ

2) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ใด ๆ

วิธีทำ 1) จาก $f(x) = 5x^3-6x^2+2x-3$

จะได้ $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^3-6x^2+2x-3\right)$

$= 15x^2-12x+2$

หรือ $f'(x) = 15x^2-12x+2$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ คือ $15x^2-12x+2$

2) จาก $f'(x) = 15x^2-12x+2$

จะได้ $\frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\left(15x^2-12x+2\right)$

$= 30x-12$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ใด ๆ คือ $30x-12$ ■

จากตัวอย่างที่ 45 จะเห็นว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f สามารถนำไปหาอนุพันธ์ต่อได้อีก ซึ่งจะเรียกผลลัพธ์นี้ว่า อนุพันธ์อันดับที่ 2 ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ จะเรียกอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ว่า **อนุพันธ์อันดับที่ 2 (second derivative)** ของฟังก์ชัน f ที่ x และเขียนแทนด้วย $f''(x)$

นอกจากสัญลักษณ์ $f''(x)$ แล้วยังมีสัญลักษณ์อื่น ๆ ที่ใช้แทนอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f ที่ x เช่น $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ หรือ y''

ตัวอย่างที่ 46

กำหนดให้ $f(x)=x^2+2-\frac{2}{x}$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2+2-\frac{2}{x}$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2+2-2x^{-1}\right)$

$= 2x+2x^{-2}$

และ $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(2x+2x^{-2}\right)$

$= 2-4x^{-3}$

$= 2-\frac{4}{x^3}$ ■

ในทำนองเดียวกัน สามารถกล่าวถึงอนุพันธ์อันดับอื่น ได้ดังนี้

อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ f เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f

อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ f เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ f

⋮

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ f เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n-1$ ของ f

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ f ที่ x เขียนแทนด้วย $f'''(x)$ หรือ $\frac{d^3y}{dx^3}$ หรือ y'''

อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ f ที่ x เขียนแทนด้วย $f^{(4)}(x)$ หรือ $\frac{d^4y}{dx^4}$ หรือ $y^{(4)}$

⋮

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ f ที่ x เขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ หรือ $\frac{d^ny}{dx^n}$ หรือ $y^{(n)}$

ตัวอย่างที่ 47

จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ $f(x)=5x^4+2x^3-x+2$

วิธีทำ จาก $f(x) = 5x^4+2x^3-x+2$

จะได้ $f'(x) = 20x^3+6x^2-1$

$f''(x) = 60x^2+12x$

$f'''(x) = 120x+12$

ดังนั้น $f^{(4)}(x) = 120$ ■

ตัวอย่างที่ 48

จงหา $f''(-1)$ เมื่อ $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$

วิธีทำ จาก

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} = (2x+1)^{-1}$$

จะได้

$$f'(x) = -1(2x+1)^{-2}\frac{d}{dx}(2x+1) = -2(2x+1)^{-2}$$

และ

$$f''(x) = 4(2x+1)^{-3}\frac{d}{dx}(2x+1) = 8(2x+1)^{-3} = \frac{8}{(2x+1)^3}$$

ดังนั้น

$$f''(-1) = \frac{8}{(2(-1)+1)^3} = -8$$ ■

เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $y = f(x)$ เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ดังนั้น อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $y = f'(x)$ เทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ

แบบฝึกหัด 2.7

1. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันต่อไปนี้
   1) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$
   2) $f(x) = 5 + 2x + 4x^3 - 3x^5$
   3) $f(x) = 3x^4 - 2x + \sqrt{x} - 5$
   4) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 4x^2$
   5) $f(x) = (5x^2 - 3)(7x^3 + x)$
   6) $f(x) = \frac{x+1}{x}$
   7) $f(x) = \frac{3x-2}{5x}$

2. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของฟังก์ชันต่อไปนี้
   1) $f(x) = x^{-5} + x^5$
   2) $f(x) = 5x^2 - 4x + 7$
   3) $f(x) = 3x^{-2} + 4x^{-1} + x$
   4) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

3. จงหา $f'''(2)$ เมื่อ $f(x) = 3x^2 - 2$

4. กำหนดให้ $y = \frac{6}{x^4}$ จงหา $\frac{d^4y}{dx^4}$

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{1-x}$ จงหา $f^{(n)}(x)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

2.8 การประยุกต์ของอนุพันธ์

2.8.1 การเคลื่อนที่แนวตรง

ในการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวตรง มีปริมาณ 3 ชนิดที่เกี่ยวข้องกับเวลา ได้แก่ ตำแหน่งของวัตถุ ความเร็วของวัตถุ และความเร่งของวัตถุ การเคลื่อนที่ของวัตถุสามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชัน $y = s(t)$ โดยที่ $s(t)$ คือตำแหน่งของวัตถุ ณ ขณะเวลา t ใด ๆ

ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ s เทียบกับ t ณ ขณะเวลา t นั่นคือ ความเร็ว v เป็นอนุพันธ์ของ s เทียบกับ t ดังนั้น v เป็นฟังก์ชันของเวลา t กำหนดโดย

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

จะเห็นว่าความเร็ว v เป็นฟังก์ชันของเวลา t

ในทำนองเดียวกัน ความเร่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว v เทียบกับ t ณ ขณะเวลา t นั่นคือ ความเร่ง a เป็นอนุพันธ์ของ v เทียบกับ t นั่นคือ

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

ดังนั้น ความเร่งคืออนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันความเร็ว v และเป็นอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันตำแหน่ง s

โดยทั่วไป คำว่าความเร็วและอัตราเร็วมีความหมายไม่แตกต่างกันและใช้แทนกันได้ แต่ในวิชาฟิสิกส์ ความเร็วและอัตราเร็วจะใช้ในความหมายที่แตกต่างกัน ความเร็วเป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีทั้งขนาดและทิศทาง ส่วนอัตราเร็วเป็นปริมาณสเกลาร์ มีค่าเท่ากับขนาดของความเร็ว อัตราเร็วเป็นปริมาณที่บอกให้ทราบว่าวัตถุเคลื่อนที่ได้เร็วหรือช้าเพียงใด แต่ไม่ได้บอกว่าวัตถุนั้นกำลังเคลื่อนที่ไปในทิศทางใด ส่วนความเร็วเป็นปริมาณที่บอกให้ทราบว่าวัตถุเคลื่อนที่เร็วหรือช้าเท่าใดพร้อมทั้งบอกทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ เช่น ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบจะใช้เส้นจำนวนเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้าความเร็วเป็นจำนวนจริงบวก

แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ไปทางขวา ถ้าความเร็วเป็นจำนวนจริงลบแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ไปทางซ้าย หรือในกรณีวัตถุเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง ถ้าความเร็วเป็นจำนวนจริงบวกแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ขึ้นข้างบน และถ้าความเร็วเป็นจำนวนจริงลบแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ลงข้างล่าง

ในทำนองเดียวกัน ความเร่งเป็นปริมาณเวกเตอร์ที่มีทั้งขนาดและทิศทาง ส่วนอัตราเร่งเป็นปริมาณสเกลาร์ มีค่าเท่ากับขนาดของความเร่ง เช่น ในการเคลื่อนที่แนวตรง ถ้าความเร่งเป็นจำนวนจริงบวกแสดงว่า ณ ขณะนั้นความเร็วกำลังเพิ่มขึ้น แต่ถ้าความเร่งเป็นจำนวนจริงลบแสดงว่า ณ ขณะนั้นความเร็วกำลังลดลง (ถึงแม้ว่าความเร็วขณะนั้นอาจจะเป็นจำนวนจริงบวกก็ได้)

ตัวอย่างที่ 49

ให้ $s(t)=t^2+t$ เป็นฟังก์ชันแสดงตำแหน่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวราบ (มีหน่วยเป็นเมตร) ขณะเวลา t วินาที จงหา

1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นขณะเวลา 10 วินาที
2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 10 วินาที
3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 10 วินาที

วิธีทำ จาก $s(t)=t^2+t$

จะได้ว่า $v(t)=s'(t)=2t+1$

และ $a(t)=v'(t)=2$

1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นขณะเวลา 10 วินาที
   คือ $|s(10)-s(0)|=|10^2+10-0|=|110|=110$ เมตร
2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 10 วินาที คือ $v(10)=2(10)+1=21$ เมตรต่อวินาที
3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 10 วินาที คือ $a(10)=2$ เมตรต่อวินาที^{2} ■

จากตัวอย่างที่ 49 ขณะเวลา 10 วินาที ความเร็วและความเร่งของวัตถุเป็นจำนวนจริงบวก แสดงว่าวัตถุกำลังเคลื่อนที่ไปทางขวาและมีความเร็วเพิ่มขึ้น

ตัวอย่างที่ 50

อรสาโยนวัตถุขึ้นไปในแนวดิ่ง ถ้าตำแหน่งของวัตถุ (มีหน่วยเป็นเมตร) หลังจากโยนวัตถุไปแล้ว t วินาที หาได้จาก $s(t)=30t-5t^2$ จงหา

1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้น หลังจากโยนวัตถุไปแล้ว 5 วินาที
2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 2 วินาที
3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 2 วินาที

วิธีทำ จาก $s(t)=30t-5t^2$

จะได้ว่า $v(t)=s'(t)=30-10t$

และ $a(t)=v'(t)=-10$

1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้น หลังจากโยนวัตถุไปแล้ว 5 วินาที คือ

$|s(5)-s(0)| = |30(5)-5(5^2)-0| = |25| = 25$ เมตร

2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 2 วินาที คือ $v(2)=30-10(2)=10$ เมตรต่อวินาที
3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 2 วินาที คือ $a(2)=-10$ เมตรต่อวินาที^{2} ■

จากตัวอย่างที่ 50 ขณะเวลา 2 วินาที ความเร็วของวัตถุเป็นจำนวนจริงบวก แต่ความเร่งของวัตถุเป็นจำนวนจริงลบ แสดงว่าวัตถุกำลังเคลื่อนที่ขึ้น แต่มีความเร็วลดลง

แบบฝึกหัด 2.8.1

1. ให้ $s(t)=2t^3-t+5$ เป็นฟังก์ชันแสดงตำแหน่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวตรง (มีหน่วยเป็นเมตร) ขณะเวลา t วินาที จงหาระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้น ความเร็ว และความเร่งของวัตถุขณะเวลา 1 วินาที

2. กำหนดให้วัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบ ถ้าตำแหน่งของวัตถุ (มีหน่วยเป็นเมตร) ขณะเวลา t วินาที หาได้จาก $s(t)=t^3-3t^2+t+5$ จงหาระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้น ความเร็ว และความเร่งของวัตถุขณะที่ $t=1$

3. สุทธิพงศ์ปล่อยวัตถุจากที่สูงลงสู่พื้นดิน ถ้าตำแหน่งของวัตถุ (มีหน่วยเป็นเมตร) หลังจากปล่อยวัตถุไปแล้ว t วินาที หาได้จาก $s(t) = -5t^2 + 50$ จงหา
   1) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้น หลังจากปล่อยวัตถุไปแล้ว 3 วินาที
   2) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา 2 วินาที
   3) ความเร่งของวัตถุขณะเวลา 5 วินาที

4. โยนก้อนหินขึ้นไปในแนวดิ่ง ถ้าตำแหน่งของก้อนหิน (มีหน่วยเป็นเมตร) หาได้จาก $s(t) = 10t - 5t^2$ เมื่อ t แทนระยะเวลาตั้งแต่เริ่มโยนก้อนหิน (มีหน่วยเป็นวินาที) จงหา
   1) ความเร็วของก้อนหินขณะเวลา t ใด ๆ
   2) ความเร่งของก้อนหินขณะเวลา t ใด ๆ
   3) เมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด ก้อนหินจึงจะอยู่ในตำแหน่งที่สูงที่สุดจากตำแหน่งเริ่มต้น

2.8.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน กล่าวคือ เมื่อกำหนดฟังก์ชันในรูป $y = f(x)$ แล้ว ต้องการหาค่า x ที่ทำให้ y มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

สำหรับฟังก์ชันกำลังสอง การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดอาจทำได้โดยใช้วิธีทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ดังที่ได้ศึกษามาแล้ว เช่น กำหนด $y = 12x - x^2$ จะได้ $y = 36 - (x^2 - 12x + 36)$ เมื่อจัด $x^2 - 12x + 36$ ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ จะได้ $y = 36 - (x-6)^2$ และเมื่อแทน x ด้วย 6 ทำให้ $(x-6)^2 = 0$ ดังนั้น y จึงมีค่าสูงสุดเท่ากับ 36 เมื่อ $x = 6$

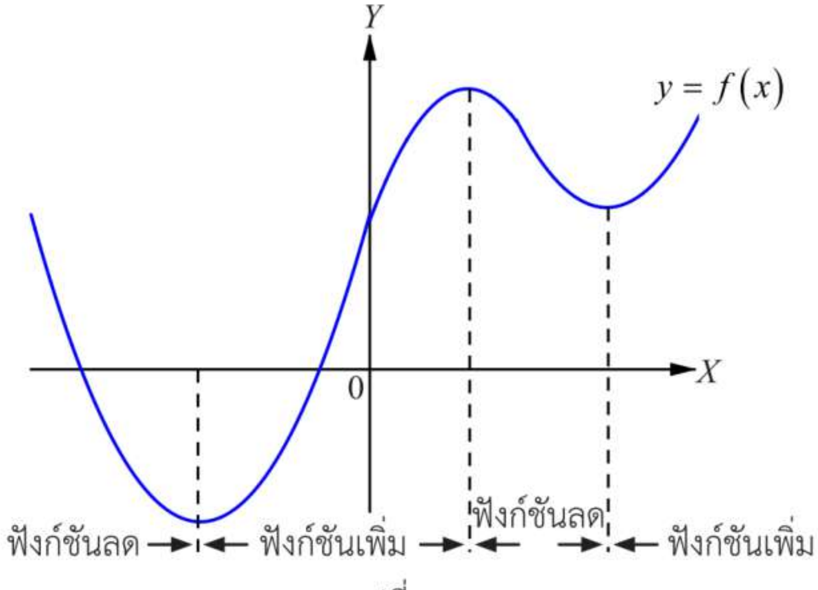
สำหรับฟังก์ชันทั่วไป การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสามารถทำได้โดยใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดที่ได้ศึกษามาแล้วในเรื่องฟังก์ชัน ดังนี้

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน

f เป็น **ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)** บนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

f เป็น **ฟังก์ชันลด (decreasing function)** บนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

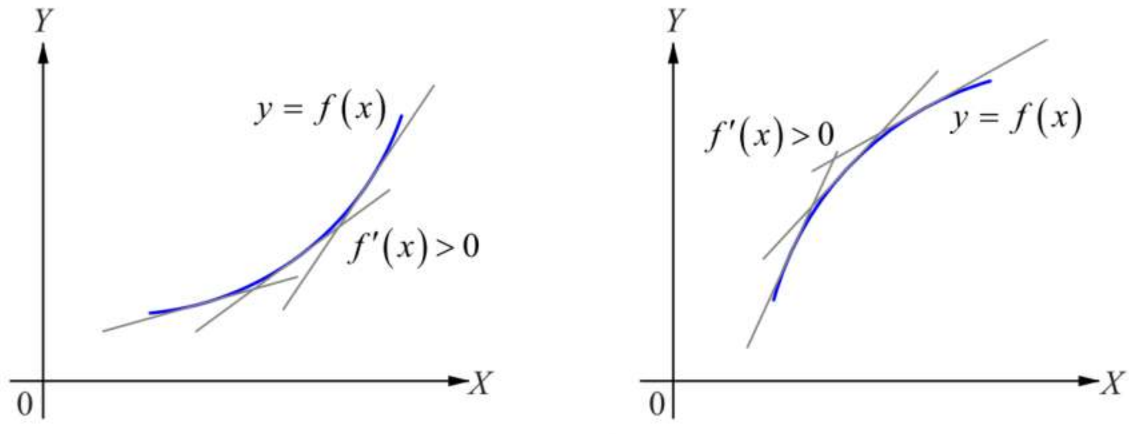
พิจารณากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้



รูปที่ 16

จากรูปที่ 16 จะเห็นว่า ในบางช่วง f เป็นฟังก์ชันลด และในบางช่วง f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

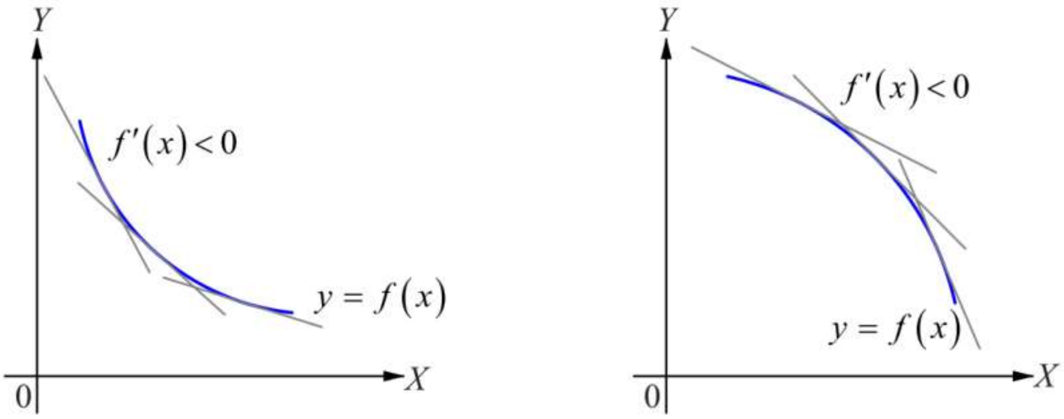
พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งซึ่งเป็นกราฟของฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด ดังต่อไปนี้



ฟังก์ชันเพิ่ม

รูปที่ 17

รูปที่ 17 แสดงกราฟของฟังก์ชันเพิ่ม เนื่องจากเมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นด้วย และจะเห็นว่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใด ๆ บนเส้นโค้งนี้เป็นจำนวนจริงบวก นั่นคือ $f'(x)>0$



ฟังก์ชันลด

รูปที่ 18

รูปที่ 18 แสดงกราฟของฟังก์ชันลด เนื่องจากเมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะลดลง และจะเห็นว่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใด ๆ บนเส้นโค้งนี้เป็นจำนวนจริงลบ นั่นคือ $f'(x)<0$

ดังนั้น การพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนช่วงใดบ้าง อาจทำได้โดยพิจารณาจากความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง A ซึ่งเป็นสับเซตของโดเมนของฟังก์ชัน f

1. ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง A
2. ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับทุก x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง A

ตัวอย่างที่ 51

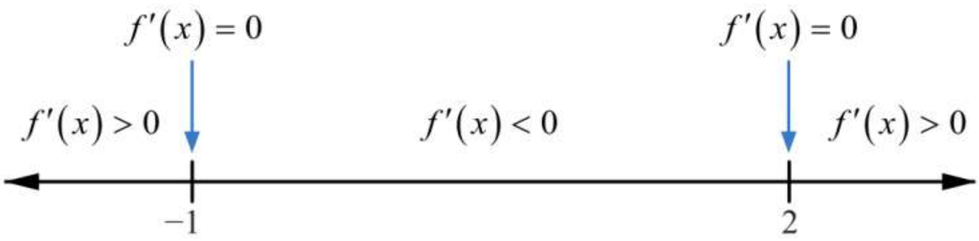
กำหนดให้ $f(x)=2x^3-3x^2-12x+4$ จงระบุช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2-6x-12 \\ &= 6(x^2-x-2) \\ &= 6(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-1$ หรือ $x=2$

พิจารณาค่าของ $f'(x)$ โดยเขียนเส้นจำนวนและจุดแบ่งช่วง ดังนี้



จะได้ว่า $f'(x)>0$ บน $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

และ $f'(x)<0$ บนช่วง $(-1,2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,-1)$

f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-1,2)$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(2,\infty)$ ■

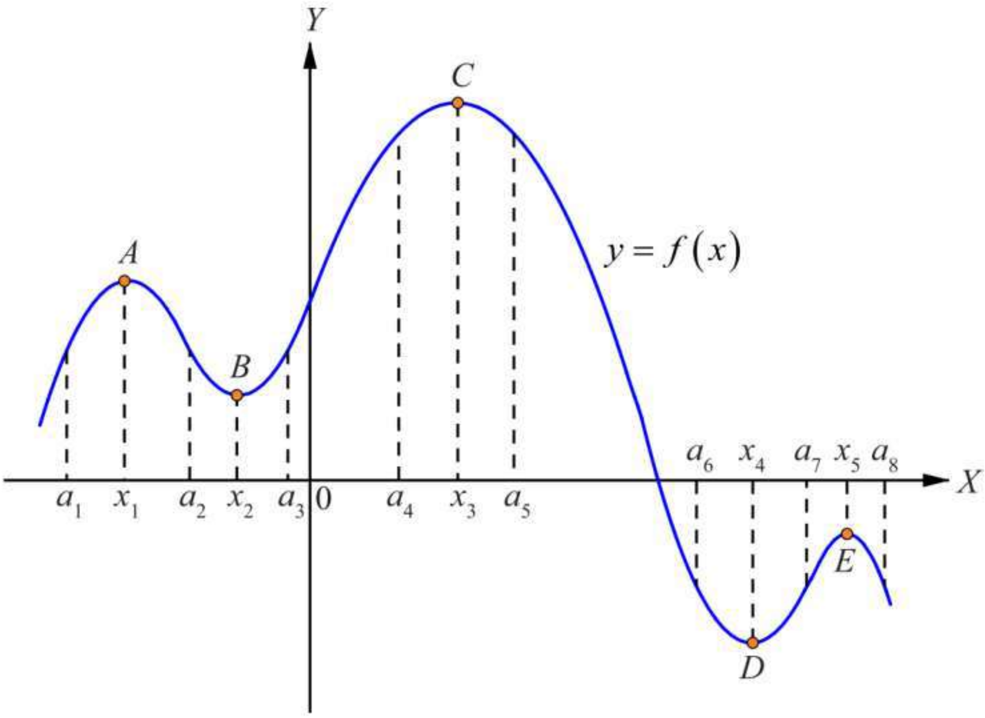
ต่อไปจะนำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันจากทฤษฎีบท 8 ไปใช้ในการพิจารณาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน แต่ก่อนที่จะพิจารณาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ควรรู้จักค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ก่อน ดังนี้

บทนิยาม 6

ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของฟังก์ชัน f ที่อยู่ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่า **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum)** ของฟังก์ชัน f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า **จุดสูงสุดสัมพัทธ์** ของฟังก์ชัน f

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง (a, b) ซึ่ง $c \in (a, b)$ และ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของฟังก์ชัน f ที่อยู่ในช่วง (a, b) เรียก $f(c)$ ว่า **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum)** ของฟังก์ชัน f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า **จุดต่ำสุดสัมพัทธ์** ของฟังก์ชัน f

พิจารณากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้



รูปที่ 19

จากกราฟ จะเห็นว่า จุด A, C และ E เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ส่วนจุด B และ D เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ กล่าวคือ

จุด A เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ซึ่งมี $f(x_1)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เนื่องจากมีช่วง (a_1, a_2) ซึ่ง $x_1 \in (a_1, a_2)$ และ $f(x_1) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a_1, a_2) \cap D_f$

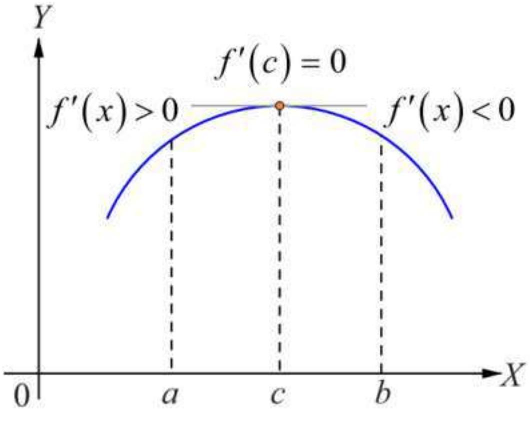
จุด C เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ซึ่งมี $f(x_3)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เนื่องจากมีช่วง (a_4, a_5) ซึ่ง $x_3 \in (a_4, a_5)$ และ $f(x_3) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a_4, a_5) \cap D_f$

จุด E เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ซึ่งมี $f(x_5)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เนื่องจากมีช่วง (a_7, a_8) ซึ่ง $x_5 \in (a_7, a_8)$ และ $f(x_5) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a_7, a_8) \cap D_f$

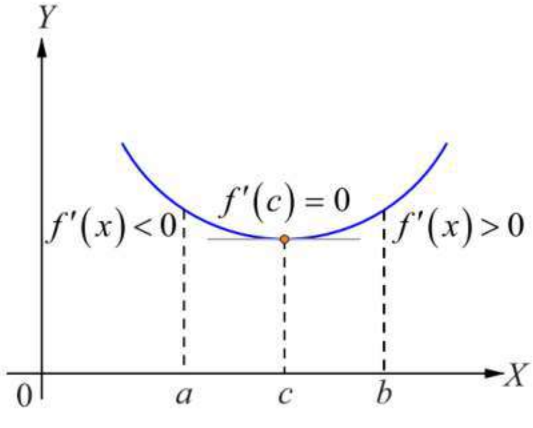
จุด B เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ซึ่งมี $f(x_2)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เนื่องจากมีช่วง (a_2, a_3) ซึ่ง $x_2 \in (a_2, a_3)$ และ $f(x_2) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a_2, a_3) \cap D_f$

จุด D เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ซึ่งมี $f(x_4)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เนื่องจากมีช่วง (a_6, a_7) ซึ่ง $x_4 \in (a_6, a_7)$ และ $f(x_4) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a_6, a_7) \cap D_f$

ต่อไปพิจารณากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้



รูปที่ 20



รูปที่ 21

จากรูปที่ 20 จะเห็นว่าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ เนื่องจากมีช่วง (a, b) ซึ่ง $c\in(a, b)$ และ $f(c)\geq f(x)$ สำหรับทุก $x\in(a, b)\cap D_f$

สังเกตว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (a, c) และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (c, b) ซึ่งกล่าวได้ว่า ถ้า $f'(x)>0$ เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย และ $f'(x)<0$ เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย แล้วฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ และสังเกตว่า $f'(c)=0$

ในทำนองเดียวกัน จากรูปที่ 21 จะเห็นว่าฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ เนื่องจากมีช่วง (a, b) ซึ่ง $c\in(a, b)$ และ $f(c)\leq f(x)$ สำหรับทุก $x\in(a, b)\cap D_f$

สังเกตว่า f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (a, c) และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (c, b) นั่นคือ ถ้า $f'(x)<0$ เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย และ $f'(x)>0$ เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย แล้วฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ และสังเกตว่า $f'(c)=0$

ดังนั้น ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f และ $f'(c)$ มีค่า แล้ว $f'(c)=0$ ซึ่งสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 9

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) และ $c\in(a, b)$ ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ และ $f'(c)$ มีค่า แล้ว $f'(c)=0$

บทนิยาม 7

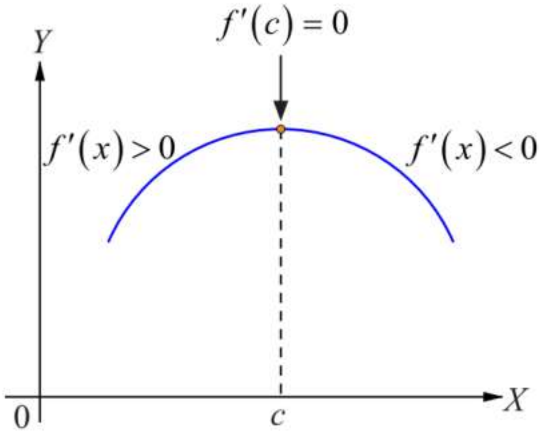
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, b) เรียกจำนวนจริง $c\in(a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า ว่า **ค่าวิกฤต (critical value)** ของฟังก์ชัน f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า **จุดวิกฤต (critical point)** ของฟังก์ชัน f

หมายเหตุ ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะฟังก์ชันที่มีเพียงค่าวิกฤต c ซึ่ง $f'(c)=0$ เท่านั้น โดยจะไม่พิจารณาฟังก์ชันที่มีค่าวิกฤต c ซึ่ง $f'(c)$ ไม่มีค่า

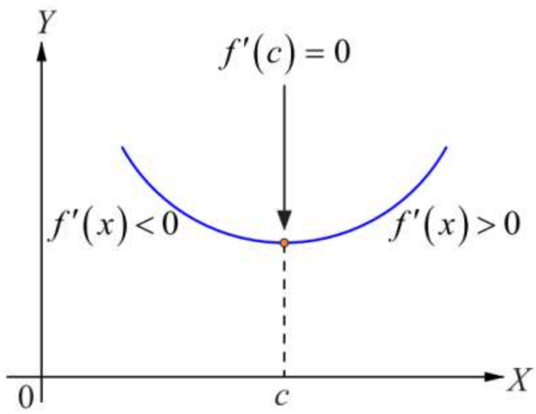
จากทฤษฎีบท 9 จะเห็นว่า ถ้า $f'(c)\neq 0$ แล้ว $f(c)$ จะไม่ใช่ค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังนั้น ในการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $y=f(x)$ จะต้องหาค่าวิกฤต c ที่ทำให้ $f'(c)=0$ ก่อน จากนั้นจึงพิจารณาว่า เมื่อ x เปลี่ยนจาก $x<c$ เป็น $x>c$ แล้วค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ หรือเปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก หรือไม่

ถ้าค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c)$ ดังรูปที่ 22

ถ้าค่าของ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c)$ ดังรูปที่ 23

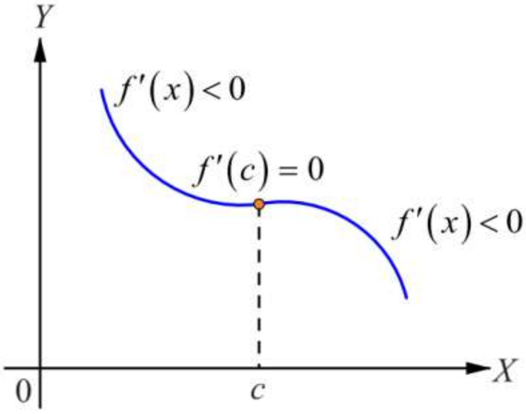


รูปที่ 22

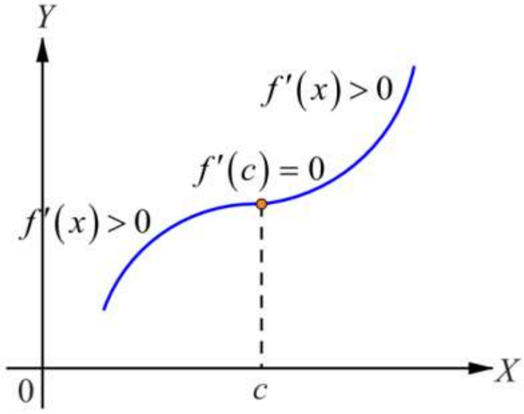


รูปที่ 23

แต่ถ้าค่าของ $f'(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบหรือไม่มีการเปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตที่ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังรูปที่ 24 และรูปที่ 25



รูปที่ 24



รูปที่ 25

ทฤษฎีบท 10

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ เมื่อ x เพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก เมื่อ x เพิ่มขึ้นรอบ ๆ c แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

ตัวอย่างที่ 52

จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

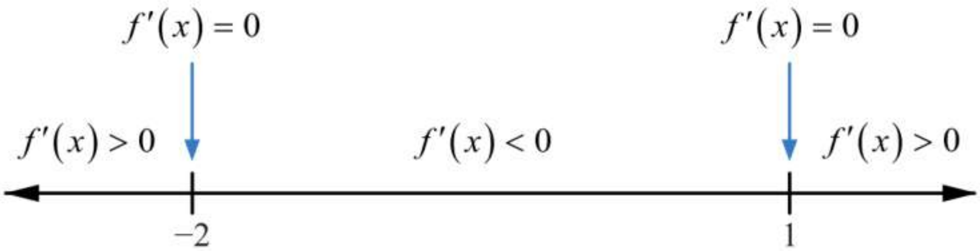
วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

จะได้
$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x^2 + x - 2) \\ &= 6(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -2$ หรือ $x = 1$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่า คือ -2 และ 1

พิจารณาค่าของ $f'(x)$ เมื่อ x เป็นค่าวิกฤตและจำนวนจริงในช่วงต่าง ๆ โดยใช้เส้นจำนวน ดังนี้



จะเห็นว่า $x = -2$ เป็นจุดแบ่งที่ทำให้ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงบวกเป็นจำนวนจริงลบ

ดังนั้น $f(-2) = 13$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

และ $x = 1$ เป็นจุดแบ่งที่ทำให้ $f'(x)$ เปลี่ยนจากจำนวนจริงลบเป็นจำนวนจริงบวก

ดังนั้น $f(1) = -14$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ■

นอกจากการใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันช่วยในการตรวจสอบค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ดังที่กล่าวมาข้างต้น บางครั้งอาจใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2 ช่วยในการตรวจสอบได้โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 11

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ เป็นค่าวิกฤตของ f ซึ่ง $f'(c) = 0$ และ $f''(c)$ มีค่า

1. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

ตัวอย่างที่ 53

จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 20$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 20$

จะได้
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 24 \\ &= 3(x^2 + 2x - 8) \\ &= 3(x+4)(x-2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -4$ หรือ $x = 2$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f มี 2 ค่า คือ -4 และ 2

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f จะได้

$$f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$$

เนื่องจาก $f''(-4) = -18$ ซึ่ง $-18 < 0$

และ $f''(2) = 18$ ซึ่ง $18 > 0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -4$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(-4) = 60$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 2$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(2) = -48$

■

จากทฤษฎีบท 11 ถ้าทราบว่า $f''(c)$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบ จะสามารถบอกได้ว่า $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ตามลำดับ แต่ถ้า $f''(c)=0$ แล้วจะไม่สามารถสรุปได้ว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เพราะ $f(c)$ อาจจะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรืออาจจะไม่เป็นทั้งค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เลยก็ได้ ดังนั้น ในกรณีนี้จะตรวจสอบค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชัน โดยใช้ทฤษฎีบท 10 ที่กล่าวไปแล้ว

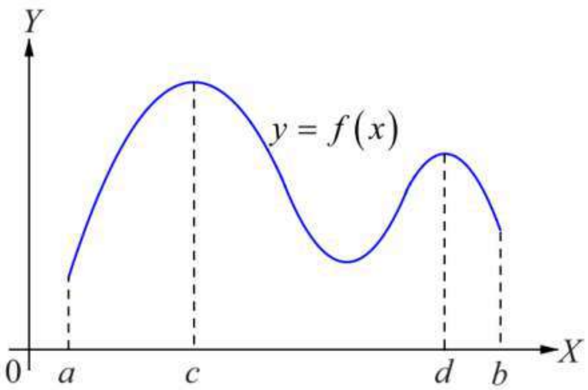
ฟังก์ชัน f อาจมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้หลายค่า แต่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เพียงค่าเดียว จะเรียกค่าของ $f(x)$ ที่มากที่สุด สำหรับทุก $x \in D_f$ ว่า ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และเรียกค่าของ $f(x)$ ที่น้อยที่สุด สำหรับทุก $x \in D_f$ ว่า ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 8

ฟังก์ชัน f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum)** ที่ $x=c$ เมื่อ $f(c) \ge f(x)$ สำหรับทุก $x \in D_f$

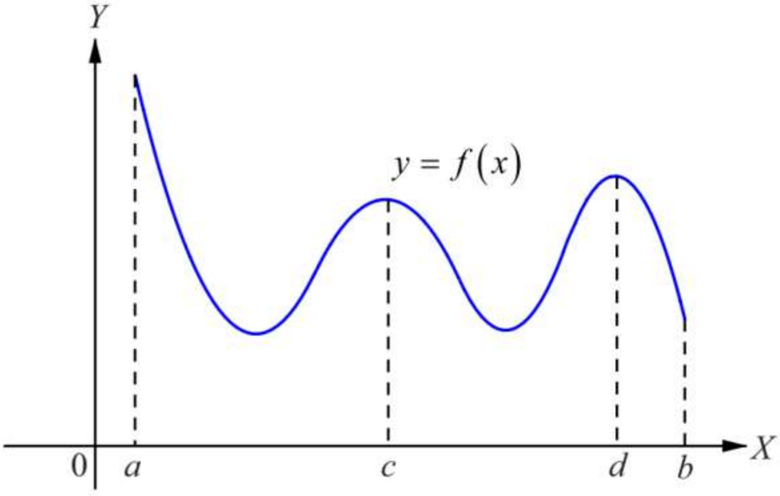
ฟังก์ชัน f มี**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum)** ที่ $x=c$ เมื่อ $f(c) \le f(x)$ สำหรับทุก $x \in D_f$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ โดยที่ $D_f=[a, b]$ ดังรูปที่ 26 – 29



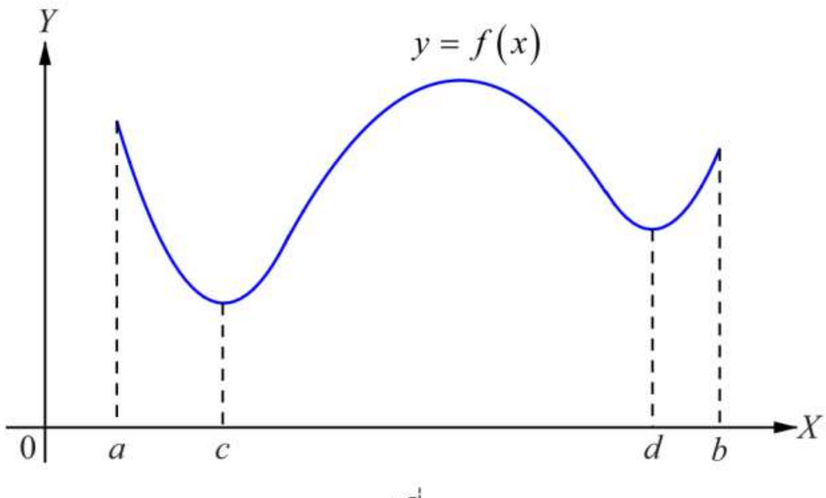
รูปที่ 26

จากรูปที่ 26 จะเห็นว่า $f(c)$ และ $f(d)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ โดยที่ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ด้วย



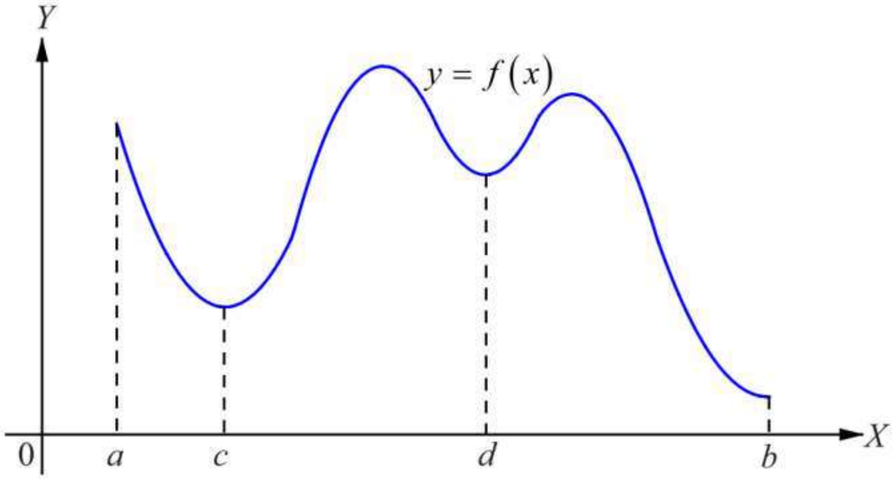
รูปที่ 27

จากรูปที่ 27 จะเห็นว่า $f(a)$, $f(c)$ และ $f(d)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ โดยที่ $f(a)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ด้วย



รูปที่ 28

จากรูปที่ 28 จะเห็นว่า $f(c)$ และ $f(d)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยที่ $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ด้วย



รูปที่ 29

จากรูปที่ 29 จะเห็นว่า $f(c), f(d)$ และ $f(b)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยที่ $f(b)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ด้วย

ฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบนช่วงเปิดอาจจะมีหรือไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ก็ได้ เช่น $f(x) = \frac{1}{x}$ ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงเปิด $(0, 1)$ แต่ฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบนช่วงปิดจะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์เสมอ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 12

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f จะมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a, b]$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้วค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f อาจเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ภายในช่วงเปิด (a, b) หรือเป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายของช่วงปิด $[a, b]$

การหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b) แล้ว สามารถหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a, b]$ ได้ดังนี้

1. หาค่าวิกฤตทั้งหมดในช่วงเปิด (a, b)
2. หาค่าของฟังก์ชัน ณ ค่าวิกฤตที่ได้จากข้อ 1
3. หาค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายของช่วงปิด $[a, b]$ นั่นคือ หา $f(a)$ และ $f(b)$
4. เปรียบเทียบค่าที่ได้ทั้งหมดจากข้อ 2 และ 3 ซึ่งจะทำให้ได้ข้อสรุปว่า
   ค่ามากที่สุดเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f
   ค่าน้อยที่สุดเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

ตัวอย่างที่ 54

จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 42$ บนช่วงปิด $[-5, 5]$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 42$

จะได้
$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 36 \\ &= 6(x^2 - x - 6) \\ &= 6(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 3$ หรือ $x = -2$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(-5, 5)$ คือ 3 และ –2

ต่อไปคำนวณหา $f(-5), f(-2), f(3)$ และ $f(5)$ จะได้

$$\begin{aligned} f(-5) &= -103 \\ f(-2) &= 86 \\ f(3) &= -39 \\ f(5) &= 37 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -2$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(-2) = 86$
และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = -5$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f(-5) = -103$

ตัวอย่างที่ 55

จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^3-3x+2$ บนช่วงปิด $[0, 2]$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3-3x+2$

จะได้
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-3 \\ &= 3(x^2-1) \\ &= 3(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ หรือ $x=-1$

แต่ $-1 \notin (0, 2)$ จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0, 2)$ คือ 1

ต่อไปคำนวณหา $f(0), f(1)$ และ $f(2)$ จะได้

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(1) &= 0 \\ f(2) &= 4 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=2$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(2)=4$
และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=1$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f(1)=0$ ■

แบบฝึกหัด 2.8.2

1. จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จงระบุช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันลด
   1) $f(x)=3-2x-x^2$
   2) $f(x)=2x^2-x-3$
   3) $f(x)=x^3-x^2-8x$
   4) $f(x)=2x^3+3x^2-36x+5$
   5) $f(x)=x^3-2x^2-4x+7$

2. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้
   1) $f(x)=x^2-8x+7$
   2) $f(x)=x^3-3x+6$
   3) $f(x)=x^3-3x^2-24x+4$
   4) $f(x)=x^4-8x^2+12$
   5) $f(x)=x^4-4x^3+8$

3. จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้
   1) $f(x)=x^2-4x+3$ บนช่วง $[0, 5]$
   2) $f(x)=x^3-2x^2-4x+8$ บนช่วง $[-2, 3]$
   3) $f(x)=x^4-2x^3-9x^2+27$ บนช่วง $[-2, 4]$
   4) $f(x)=x^3+5x-4$ บนช่วง $[-3, -1]$

4. กำหนดให้ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ จงยกตัวอย่างจำนวนจริง a, b และ c ที่ทำให้
   1) f มีค่าวิกฤต 2 ค่า
   2) f มีค่าวิกฤตเพียง 1 ค่า
   3) f ไม่มีค่าวิกฤต

2.8.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

ในชีวิตจริงหรือในทางธุรกิจ มักจะพบปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดเสมอ เช่น ต้องการให้รายรับหรือผลตอบแทนสูงสุด โดยที่รายจ่ายหรือต้นทุนต่ำสุด ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดจะต้องสร้างสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของปริมาณที่เกี่ยวข้องกัน แล้วเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่มีตัวแปรต้นและตัวแปรตาม จากนั้นจึงพิจารณาเงื่อนไขของโจทย์ว่าฟังก์ชันนั้นมีโดเมนเป็นเซตใด และต้องการให้หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดบนโดเมนที่กำหนด

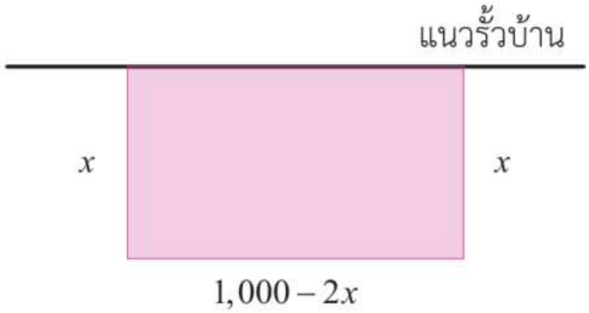
หลักการทั่วไปในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

1. ทำความเข้าใจปัญหาอย่างละเอียด ว่ามีปริมาณใดบ้างที่เกี่ยวข้องกัน และเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แทนปริมาณที่เกี่ยวข้องให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันบนช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ปัญหา
2. ใช้วิธีการที่ได้ศึกษาในหัวข้อที่แล้วในการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้น

ตัวอย่างที่ 56

ต้องการนำลวดหนามยาว 1,000 เมตร มากั้นพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยที่พื้นที่ด้านหนึ่งอยู่ติดริมรั้วบ้านจึงไม่ต้องขึงลวดหนามกั้น จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมดังกล่าวที่ทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด และจะได้พื้นที่ที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

วิธีทำ ให้ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก



ดังนั้น ความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ $1{,}000-2x$ เมตร
และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ $x(1{,}000-2x)$ ตารางเมตร
เนื่องจากความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นจำนวนจริงบวก
นั่นคือ $x \in (0, 500)$

ให้ $A(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่และความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$A(x) = x(1{,}000-2x) \text{ เมื่อ } x \in (0, 500)$$
$$= 1{,}000x - 2x^2$$

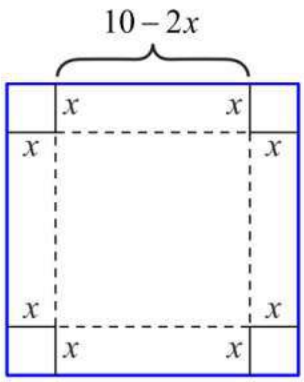
ดังนั้น $A'(x) = 1{,}000-4x$
ถ้า $A'(x) = 0$ แล้วจะได้ $1{,}000-4x=0$ นั่นคือ $x=250$
ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0, 500)$ คือ 250
ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน A จะได้ $A''(x)=-4$
เนื่องจาก $A''(250)=-4$ ซึ่ง $-4<0$
ดังนั้น A มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=250$ เพียงค่าเดียวบนช่วง $(0, 500)$
สรุปได้ว่า A มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=250$ บนช่วง $(0, 500)$
และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $A(250)=125{,}000$
ดังนั้น ต้องกั้นพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง 250 เมตร และความยาว 500 เมตร จึงจะทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด และพื้นที่ที่มากที่สุดเป็น 125,000 ตารางเมตร

■

ตัวอย่างที่ 57

ต้องการทำกล่องจากกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว 10 เซนติเมตร โดยตัดกระดาษเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว x เซนติเมตร ออกจากมุมทั้งสี่ แล้วพับด้านข้างขึ้นเพื่อทำเป็นกล่องไม่มีฝา จงหาว่ากล่องจะมีความจุมากที่สุด เมื่อ x เป็นเท่าใด และกล่องจะมีความจุมากที่สุดเท่าใด

วิธีทำ ให้ $V(x)$ แทนความจุของกล่อง เมื่อ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ถูกตัดออก จะได้ว่า $x \in (0, 5)$



ดังนั้น $V(x) = (10-2x)^2 x$ เมื่อ $x \in (0, 5)$

$$= (100-40x+4x^2)x$$

$$= 4x^3-40x^2+100x$$

จะได้ $V'(x) = 12x^2-80x+100$

ถ้า $V'(x) = 0$

แล้วจะได้ $12x^2-80x+100 = 0$

$$3x^2-20x+25 = 0$$

$$(3x-5)(x-5) = 0$$

นั่นคือ $x=5$ หรือ $x=\frac{5}{3}$

แต่ $5 \notin (0, 5)$ จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0, 5)$ คือ $\frac{5}{3}$

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน V จะได้ $V''(x) = 24x-80$

เนื่องจาก $V''\left(\frac{5}{3}\right) = -40$ ซึ่ง $-40 < 0$

ดังนั้น V มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\frac{5}{3}$ เพียงค่าเดียวบนช่วง $(0, 5)$

สรุปได้ว่า V มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=\frac{5}{3}$ บนช่วง $(0, 5)$

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2,000}{27}$

ดังนั้น กล่องจะมีความจุมากที่สุด เมื่อ x เป็น $\frac{5}{3}$ เซนติเมตร และกล่องจะมีความจุมากที่สุด $\frac{2,000}{27}$ ลูกบาศก์เซนติเมตร ■

ตัวอย่างที่ 58

จงหาจำนวนจริงสองจำนวนซึ่งมีผลคูณเป็น -9 และผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่าน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงสองจำนวนที่คูณกันได้ -9 โดยที่ $x>0$ และ $y<0$

ดังนั้น $y=-\frac{9}{x}$ เมื่อ $x\in(0,\infty)$

ให้ $M(x) = x^2+y^2$

จะได้ $M(x) = x^2+\left(-\frac{9}{x}\right)^2$

$= x^2+\frac{81}{x^2}$ เมื่อ $x\in(0,\infty)$

ดังนั้น $M'(x) = 2x-\frac{162}{x^3} = \frac{2(x^4-81)}{x^3}$

ถ้า $M'(x)=0$ แล้วจะได้ $\frac{2(x^4-81)}{x^3}=0$

นั่นคือ $x=-3$ หรือ $x=3$

แต่ $-3\notin(0,\infty)$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0,\infty)$ คือ 3

เนื่องจาก $M'(x)<0$ เมื่อ $0<x<3$

และ $M'(x)>0$ เมื่อ $x>3$

จะได้ M เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0,3)$

และ M เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(3,\infty)$

ดังนั้น M มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=3$ เพียงค่าเดียวในช่วงเปิด $(0,\infty)$

สรุปได้ว่า M มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=3$

จะได้ว่าจำนวนจริงสองจำนวนซึ่งคูณกันได้ -9 และผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่าน้อยที่สุด คือ $x=3$ และ $y=-\frac{9}{3}=-3$ ■

เมื่อพิจารณาตัวอย่างที่ 56 – 58 จะเห็นว่าช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ปัญหาเป็นช่วงเปิด ในการตรวจสอบค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์นั้นสามารถใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2 ดังตัวอย่างที่ 56 – 57 หรือใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1 ดังตัวอย่างที่ 58 ซึ่งสามารถเลือกใช้วิธีใดก็ได้ตามความเหมาะสม

ตัวอย่างที่ 59

โรงแรมแห่งหนึ่งมีห้องพัก 40 ห้อง เจ้าของโรงแรมพบว่าในช่วงเวลาปกติถ้าเขาคิดค่าห้อง 500 บาทต่อวัน จะมีผู้เข้าพักเต็มทุกห้อง แต่ถ้าเขาขึ้นราคาค่าห้องต่อวัน พบว่าทุก 50 บาทที่เพิ่มขึ้น จะมีห้องว่างเพิ่มขึ้น 2 ห้อง จงหาว่าเจ้าของโรงแรมควรตั้งราคาค่าห้องวันละเท่าใดจึงจะทำให้มีรายได้มากที่สุด โดยโรงแรมจะมีผู้เข้าพักทั้งหมดกี่ห้อง และเจ้าของโรงแรมจะมีรายได้มากที่สุดเท่าใด

วิธีทำ ให้ $f(x)$ แทนรายได้ต่อวันของเจ้าของโรงแรม เมื่อ x แทนจำนวนครั้งที่เจ้าของโรงแรมขึ้นราคาค่าห้องครั้งละ 50 บาทต่อวัน

เนื่องจากโรงแรมแห่งนี้มีห้องพัก 40 ห้อง และในแต่ละครั้งที่เจ้าของโรงแรมขึ้นราคาค่าห้อง จะมีห้องว่างเพิ่มขึ้น 2 ห้อง ดังนั้น $x \in [0, 20]$ และจะได้

$$f(x) = (500 + 50x)(40 - 2x)$$
$$= 20,000 + 1,000x - 100x^2$$

ดังนั้น $f'(x) = 1,000 - 200x$

ถ้า $f'(x) = 0$ แล้วจะได้ $1,000 - 200x = 0$

นั่นคือ $x = 5$

จะได้ว่าค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0, 20)$ คือ 5

ต่อไปคำนวณหา $f(0), f(5)$ และ $f(20)$ จะได้

$$f(0) = 20,000$$
$$f(5) = 22,500$$
$$f(20) = 0$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = 5$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(5) = 22,500$

ดังนั้น เจ้าของโรงแรมควรตั้งราคาค่าห้องวันละ $500+50(5)=750$ บาท จึงจะทำให้มีรายได้มากที่สุด โดยโรงแรมจะมีผู้เข้าพักทั้งหมด $40-2(5)=30$ ห้อง และเจ้าของโรงแรมจะมีรายได้มากที่สุด 22,500 บาท ■

ตัวอย่างที่ 60

โรงงานแห่งหนึ่งผลิตของเล่นโดยฟังก์ชันการผลิต คือ $P=50x^{0.4}y^{0.6}$ โดยที่

P แทนจำนวนของเล่นที่ผลิตได้ใน 1 ชั่วโมง (มีหน่วยเป็นชิ้น)

x แทนจำนวนแรงงานที่ใช้ใน 1 ชั่วโมง

และ y แทนจำนวนปัจจัยทุนที่ใช้ใน 1 ชั่วโมง

จงหาจำนวนของเล่นที่มากที่สุดที่โรงงานแห่งนี้จะผลิตได้ใน 1 ชั่วโมง ภายใต้งบประมาณ 20,000 บาท ถ้าแรงงานหนึ่งหน่วยมีค่าใช้จ่าย 100 บาท และปัจจัยทุนหนึ่งหน่วยมีค่าใช้จ่าย 200 บาท

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่าเงื่อนไขของงบประมาณเขียนแทนได้ด้วยสมการ

$$100x+200y = 20{,}000 \quad \text{เมื่อ } y\in[0,100]$$

นั่นคือ $$x = 200-2y$$

จะได้ $$P = 50(200-2y)^{0.4}y^{0.6}$$

ให้ $f(y)=50(200-2y)^{0.4}y^{0.6}$

ต้องการหาค่าสูงสุดของ $f(y)$ บนช่วง $[0,100]$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}
f'(y) &= 50(200-2y)^{0.4}\frac{d}{dy}\left(y^{0.6}\right)+y^{0.6}\frac{d}{dy}\left(50(200-2y)^{0.4}\right)\\
&= 50(200-2y)^{0.4}(0.6)y^{-0.4}\\
&\quad +y^{0.6}(50)(0.4)(200-2y)^{-0.6}\frac{d}{dy}(200-2y)\\
&= 30\left(\frac{200-2y}{y}\right)^{0.4}+20\left(\frac{y}{200-2y}\right)^{0.6}(-2)\\
&= 30\left(\frac{200-2y}{y}\right)^{0.4}-40\left(\frac{y}{200-2y}\right)^{0.6}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $f'(y) = 0$

แล้วจะได้
$$\begin{aligned}30\left(\frac{200-2y}{y}\right)^{0.4} &= 40\left(\frac{y}{200-2y}\right)^{0.6}\\ 3(200-2y) &= 4y\\ 600-6y &= 4y\\ 10y &= 600\\ y &= 60\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชันในช่วงเปิด $(0,100)$ คือ 60

ต่อไปคำนวณหา $f(0), f(60)$ และ $f(100)$ จะได้

$$\begin{aligned}f(0) &= 0\\ f(60) &= 50(80)^{0.4}(60)^{0.6} \approx 3,365.87\\ f(100) &= 0\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $y=60$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(60)\approx 3,365.87$ ดังนั้น จำนวนของเล่นที่มากที่สุดที่โรงงานแห่งนี้จะผลิตได้ใน 1 ชั่วโมง ภายใต้งบประมาณ 20,000 บาท คือ 3,365 ชิ้น ■

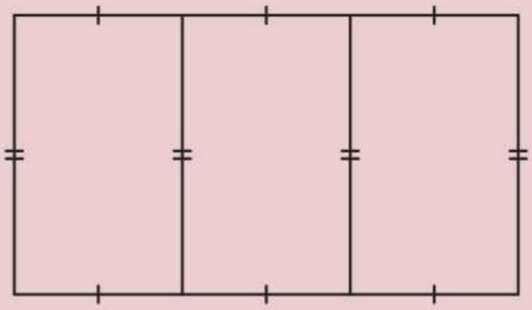
แบบฝึกหัด 2.8.3

1. ถ้าราคาต่อชิ้นและจำนวนสินค้าที่แม่ค้าคนหนึ่งขายได้ใน 1 สัปดาห์ มีความสัมพันธ์ดังสมการ $p=100-0.04x$ เมื่อ p แทนราคาสินค้าต่อชิ้น (มีหน่วยเป็นบาท) และ x แทนจำนวนสินค้าที่ขายได้ใน 1 สัปดาห์ (มีหน่วยเป็นชิ้น) และต้นทุนในการผลิตสินค้า x ชิ้น เป็น $600+22x$ บาท จงหาว่าแม่ค้าจะต้องผลิตสินค้าออกขายสัปดาห์ละกี่ชิ้นจึงจะได้กำไรมากที่สุด

2. รถบรรทุกขนส่งสินค้าของบริษัทแห่งหนึ่งต้องวิ่งเป็นระยะทาง 500 กิโลเมตร ด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย x กิโลเมตรต่อชั่วโมง โดยที่ $x\in[25, 80]$ ถ้าน้ำมันราคาลิตรละ 24 บาท โดยรถบรรทุกใช้น้ำมันในอัตรา $24+\frac{x^2}{150}$ ลิตรต่อชั่วโมง และบริษัทต้องจ่ายเบี้ยเลี้ยง

ให้คนขับรถบรรทุกชั่วโมงละ 49 บาท บริษัทควรให้คนขับขับรถด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยเท่าใดจึงจะประหยัดที่สุด

3. ต้องการนำลวดหนามยาว 200 เมตร มาล้อมที่ดินรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีขนาดเท่ากัน 3 แปลง ดังรูป



จงหาว่าจะล้อมพื้นที่ได้มากที่สุดเท่าใด

4. จงหาจำนวนจริงที่เมื่อนำจำนวนดังกล่าวมาลบด้วยกำลังสองของจำนวนจริงนั้น แล้วได้ผลลบมีค่ามากที่สุด

5. จงหาจำนวนจริงสองจำนวนซึ่งมีผลบวกเป็น 10 และผลคูณของสองจำนวนนี้มีค่ามากที่สุด

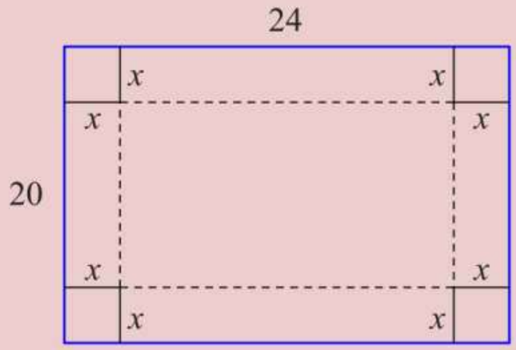
6. จงหาจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์สองจำนวน ซึ่งมีผลบวกเป็น 1 และผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่า
   1) มากที่สุด
   2) น้อยที่สุด

7. ถ้ากำไรสุทธิจากผลผลิตต่อไร่ของเกษตรกรคนหนึ่ง (มีหน่วยเป็นบาทต่อไร่) หาได้จาก $p = 400 + 20x - x^2$ เมื่อ x แทนปริมาณปุ๋ยที่ใช้ต่อไร่ (หน่วยเป็นกิโลกรัมต่อไร่) จงหาว่าจะต้องใช้ปุ๋ยกี่กิโลกรัมต่อที่ดิน 1 ไร่ จึงจะได้กำไรสุทธิสูงสุด และกำไรสุทธิสูงสุดจากผลผลิตต่อไร่เป็นเท่าใด

8. ในการเกิดปฏิกิริยาเคมีครั้งหนึ่งสามารถหาอุณหภูมิได้จากสมการ $C = 10 + 4t - 0.2t^2$ เมื่อ C แทนอุณหภูมิ (มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส) และ t แทนเวลา (มีหน่วยเป็นวินาที) จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใดอุณหภูมิจึงจะขึ้นสูงสุด และอุณหภูมิสูงสุดเป็นเท่าใด

9. ต้องการสร้างรั้วล้อมรอบพื้นที่เพื่อทำการเกษตรเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีพื้นที่ 384 ตารางเมตร โดยมีด้านหนึ่งอยู่ติดริมแม่น้ำจึงไม่จำเป็นต้องสร้างรั้ว ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับแม่น้ำต้องสร้างรั้วและประตูทางเข้ามีค่าใช้จ่ายในการสร้าง 3,000 บาทต่อเมตร ส่วนอีกสองด้านที่เหลือมีค่าใช้จ่ายในการสร้างรั้ว 1,000 บาทต่อเมตร จงหาว่าจะต้องสร้างรั้วให้มีความกว้างและความยาวเท่าใด จึงจะทำให้ค่าใช้จ่ายในการสร้างรั้วต่ำที่สุด และค่าใช้จ่ายต่ำที่สุดเป็นเท่าใด

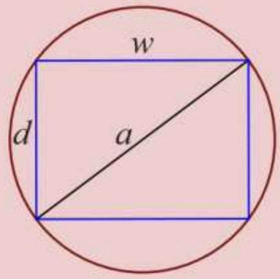
10. ต้องการทำกล่องจากแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กว้าง 20 เซนติเมตร และยาว 24 เซนติเมตร โดยตัดแผ่นโลหะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว x เซนติเมตร ออกจากมุมทั้งสี่ แล้วพับด้านข้างขึ้นเพื่อทำเป็นกล่องไม่มีฝา จงหาว่ากล่องจะมีความจุมากที่สุด เมื่อ x เป็นเท่าใด และกล่องจะมีความจุมากที่สุดเท่าใด



11. พ่อค้าขายสินค้าชนิดหนึ่งซึ่งมีต้นทุนชิ้นละ 4 บาท เขาพบว่า ถ้าเขาตั้งราคาสินค้าชิ้นละ 20 บาท เขาจะขายสินค้าได้ 1,000 ชิ้นต่อสัปดาห์ และทุก ๆ 1 บาทที่ลดราคา เขาจะขายสินค้าได้เพิ่มขึ้นสัปดาห์ละ 100 ชิ้น เขาควรจะตั้งราคาสินค้าเท่าใดจึงจะได้กำไรจากการขายมากที่สุด

12. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านทั้งสามยาว 90, 120 และ 150 หน่วย จงหาความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่มากที่สุดที่อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้ โดยมีด้านสองด้านอยู่บนด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยม

13. ท่อนไม้ท่อนหนึ่งมีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว a เซนติเมตร ต้องการเลื่อยท่อนไม้เพื่อทำเป็นคาน ให้มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีความกว้าง w เซนติเมตร หนา d เซนติเมตร และมีจุดยอดอยู่บนวงกลม ให้ s เป็นน้ำหนักที่คานรับได้ ถ้า $s = kwd^2$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว แล้วจะต้องเลื่อยให้คานมีความกว้างและความหนาเท่าใดจึงจะรับน้ำหนักได้มากที่สุด



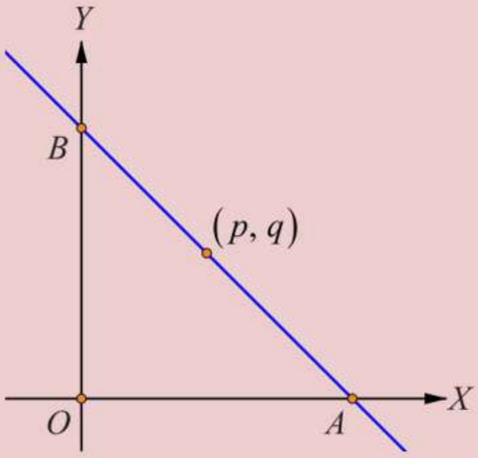
14. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตปากกาลูกลื่นโดยฟังก์ชันการผลิต คือ $P = 100x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ เมื่อ

P แทนจำนวนปากกาลูกลื่นที่ผลิตได้ใน 1 ชั่วโมง (มีหน่วยเป็นด้าม)
x แทนจำนวนแรงงานที่ใช้ใน 1 ชั่วโมง
และ y แทนจำนวนปัจจัยทุนที่ใช้ใน 1 ชั่วโมง

จงหาจำนวนปากกาลูกลื่นที่มากที่สุดที่โรงงานแห่งนี้จะผลิตได้ใน 1 ชั่วโมง ภายใต้งบประมาณ 315,000 บาท ถ้าแรงงานหนึ่งหน่วยมีค่าใช้จ่าย 150 บาท และปัจจัยทุนหนึ่งหน่วยมีค่าใช้จ่าย 300 บาท

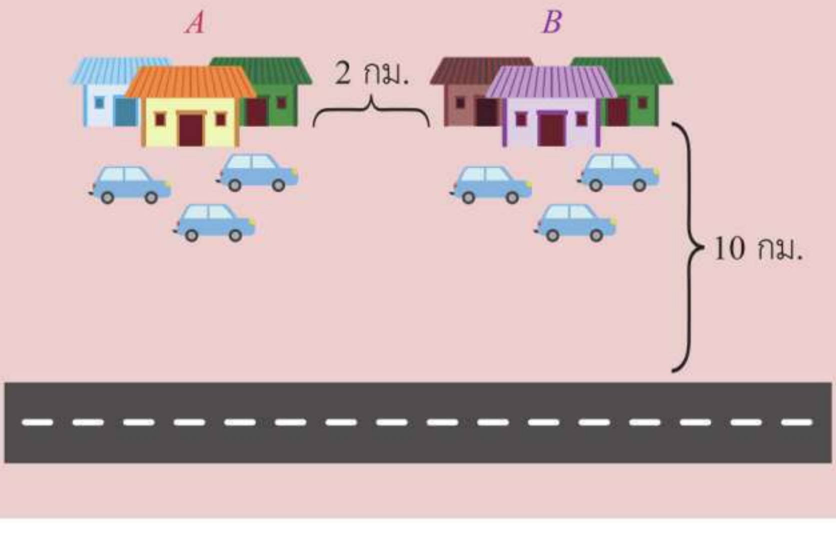
15. จงหาจุดบนพาราโบลา $y^2 = 2x$ ซึ่งอยู่ใกล้จุด $(1, 4)$ มากที่สุด

16. ให้ (p, q) เป็นจุดในจตุภาคที่ 1 ถ้าต้องการลากเส้นตรงผ่านจุด (p, q) ไปตัดแกน X และแกน Y ที่จุด A และ B ตามลำดับ ดังรูป ที่ทำให้ $OA+OB$ มีค่าน้อยที่สุด จงหาพิกัดของจุด A และ B ในรูปของ p และ q พร้อมทั้งหาว่า $OA+OB$ มีค่าน้อยที่สุดเท่าใด



กิจกรรม : สร้างถนนอย่างไรให้ประหยัดงบ

หมู่บ้าน A และหมู่บ้าน B อยู่ห่างกัน 2 กิโลเมตร และหมู่บ้านทั้งสองอยู่ห่างจากถนนสายหลัก 10 กิโลเมตร ดังรูป



ถ้าต้องการสร้างถนนเชื่อมระหว่างหมู่บ้านทั้งสองและเชื่อมกับถนนสายหลักโดยมีเงื่อนไขว่าระยะทางจากแต่ละหมู่บ้านไปยังถนนสายหลักต้องเท่ากัน จะสร้างถนนให้มีความยาวสั้นที่สุด เพื่อให้ประหยัดงบประมาณในการสร้างมากที่สุด ได้อย่างไร

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. นักเรียนมีแนวคิดที่จะสร้างถนนอย่างไร ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น

2. นำแผนผังของหมู่บ้านทั้งสองและถนนสายหลัก มาเขียนลงในระบบพิกัดฉาก โดยให้แกน X แทนถนนสายหลัก จุด $A(-1, 10)$ แทนตำแหน่งของหมู่บ้าน A และจุด $B(1, 10)$ แทนตำแหน่งของหมู่บ้าน B

3. กำหนด $c \in [0, 10]$ และจุด C เป็นจุดบนเส้นตรง $y = c$ จงหาพิกัดของจุด C ที่ทำให้ $AC = BC$

4. ให้จุด D อยู่บนแกน X จงหาพิกัดของจุด D ที่ทำให้ CD น้อยที่สุด และจงหา CD ที่น้อยที่สุดในรูปของ c

5. จงหา c ที่ทำให้ $AC + BC + CD$ น้อยที่สุด และจงหา $AC + BC + CD$ ที่น้อยที่สุด

6. จากข้อ $2-5$ จงอธิบายว่าจะสร้างถนนเชื่อมระหว่างหมู่บ้านทั้งสองและเชื่อมกับถนนสายหลักอย่างไร ให้ระยะทางจากแต่ละหมู่บ้านไปยังถนนสายหลักเท่ากัน และถนนมีความยาวสั้นที่สุด พร้อมทั้งหาความยาวของถนนที่สั้นที่สุดและระยะทางจากแต่ละหมู่บ้านไปยังถนนสายหลัก

2.9 ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ในหัวข้อ 2.3 ได้กล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปแล้ว ต่อไปจะกล่าวถึงกระบวนการกลับกัน นั่นคือ การหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน กล่าวคือ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f ให้ จะหาฟังก์ชัน F ซึ่ง $F'(x)=f(x)$ และจะเรียกฟังก์ชัน F ว่าปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f เช่น $F(x)=x^3+3x^2$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=3x^2+6x$ เพราะ $F'(x)=f(x)$ สังเกตว่าปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f มิได้มีเพียงฟังก์ชันเดียว ฟังก์ชันต่อไปนี้ล้วนเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=3x^2+6x$ เช่น

$$F_1(x)=x^3+3x^2$$
$$F_2(x)=x^3+3x^2+5$$
$$F_3(x)=x^3+3x^2-8$$

นอกจากนี้ ถ้าให้ $F(x)=x^3+3x^2+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จะได้ว่า $F'(x)=3x^2+6x=f(x)$

ถ้า f และ F เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชันซึ่ง $F'=f$ จะได้ว่า f เป็นอนุพันธ์ของ F ในทางกลับกัน จะเรียกฟังก์ชัน F ว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 9

ให้ f เป็นฟังก์ชัน ถ้า F เป็นฟังก์ชันซึ่ง $F'(x)=f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f แล้วจะเรียกฟังก์ชัน F ว่าเป็น **ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)** หนึ่งของฟังก์ชัน f

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าฟังก์ชันใด ๆ ที่อยู่ในรูป $F(x)=x^3+3x^2+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=3x^2+6x$

ตัวอย่างที่ 61

จงแสดงว่า $F(x)=6x^{\frac{4}{3}}-5x+7$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x)=8x^{\frac{1}{3}}-5$

วิธีทำ จาก $F(x) = 6x^{\frac{4}{3}}-5x+7$

จะได้ $F'(x) = 8x^{\frac{1}{3}}-5$

นั่นคือ $F'(x) = f(x)$

ดังนั้น $F(x)=6x^{\frac{4}{3}}-5x+7$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x)=8x^{\frac{1}{3}}-5$ ■

ตัวอย่างที่ 62

กำหนดให้ $f(x)=x^3$ จงหาปฏิยานุพันธ์ของ f

วิธีทำ ถ้าให้ $F(x) = x^4$ จะได้ $F'(x) = 4x^3$ ซึ่งไม่เท่ากับฟังก์ชัน f

แต่ถ้าให้ $F(x) = \frac{x^4}{4}$ จะได้ $F'(x) = x^3$ ซึ่งคือฟังก์ชัน f

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=x^3$ คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $F(x)=\frac{x^4}{4}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

จากตัวอย่างที่ 62 จะเห็นว่า ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f มีได้หลายฟังก์ชันและจะต่างกันที่ค่าคงตัวเท่านั้น เนื่องจากการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f คือการหาฟังก์ชัน F ซึ่ง $F'(x)=f(x)$ สำหรับทุก $x \in D_f$ ดังนั้น รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f คือ ฟังก์ชัน $F(x)+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

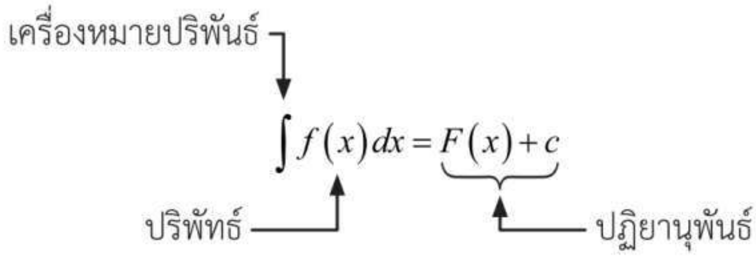
จะเขียนแทนรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral)** ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ปริพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x

ดังนั้น ถ้า $F'(x) = f(x)$

แล้ว $\int f(x)dx = F(x)+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

กล่าวคือ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ f ก็คือ รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ f นั่นเอง

เรียกการหา $\int f(x)dx$ ว่า **การหาปริพันธ์ (integration)** เรียกเครื่องหมาย “ $\int$ ” ว่า **เครื่องหมายปริพันธ์ (integral sign)** และเรียก $f(x)$ ว่า **ปริพัทธ์ (integrand)** โดยสัญลักษณ์ dx คือ การบอกว่าหาปริพันธ์นี้เทียบกับตัวแปร x



เสริมสมอง : ข้อโต้เถียงเรื่องแคลคูลัส



Gottfried Wilhelm Leibniz



Isaac Newton

ข้อโต้เถียงเรื่องแคลคูลัสระหว่าง Gottfried Wilhelm Leibniz (ค.ศ. 1646 – 1716) พหูสูตชาวเยอรมัน กับ Isaac Newton (ค.ศ. 1643 – 1727) นักวิทยาศาสตร์ชาวอังกฤษ เป็นประเด็นโต้เถียงในช่วงศตวรรษที่ 17 ว่า Leibniz ได้คิดค้นแคลคูลัสโดยได้แนวคิดมาจาก Newton หรือเขาได้คิดค้นแคลคูลัสขึ้นเอง เนื่องจากทั้ง Leibniz และ Newton ต่างได้พัฒนาแนวคิดเรื่องแคลคูลัสขึ้นมาในเวลาที่ใกล้เคียงกัน โดยหลังจากที่ Leibniz เสียชีวิตแล้วเป็นเวลาหลายปี จึงเป็นที่ยอมรับว่าทั้ง Leibniz และ Newton ต่างคิดค้นแนวคิดหลักของแคลคูลัสขึ้นเองอย่างเป็นอิสระต่อกัน ทั้งนี้ ในการศึกษาแคลคูลัสในปัจจุบัน ได้ใช้สัญลักษณ์ d และ $\int$ ซึ่ง Leibniz เป็นผู้นำมาใช้เป็นคนแรก

สูตรต่อไปนี้เป็นสูตรสำหรับหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน

สูตรที่ 1 ถ้า k เป็นค่าคงตัว แล้ว $\int k\,dx = kx + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 63

จงหา $\int 5\,dx$

วิธีทำ $\int 5\,dx = 5x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ■

สูตรที่ 2 ถ้า a เป็นจำนวนจริงและ $a \neq -1$ แล้ว $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 64

จงหา $\int x^5\,dx$

วิธีทำ

$$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$= \frac{x^6}{6} + c$$

■

ตัวอย่างที่ 65

จงหา $\int \frac{1}{x^3}dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$

จะได้
$$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}\,dx$$
$$= \frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$
$$= \frac{x^{-2}}{-2}+c$$
$$= -\frac{1}{2x^2}+c$$

สูตรที่ 3 ถ้า k เป็นค่าคงตัว แล้ว $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$

ตัวอย่างที่ 66

จงหา $\int 3x^2\,dx$

วิธีทำ
$$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$$
$$= 3\left(\frac{x^3}{3}+c_1\right) \quad \text{เมื่อ } c_1 \text{ เป็นค่าคงตัว}$$
$$= x^3+c \quad \text{เมื่อ } c = 3c_1$$

สูตรที่ 4 $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

ตัวอย่างที่ 67

จงหา $\int (x^2+2x)dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int (x^2+2x)dx &= \int x^2dx + \int 2xdx \\ &= \int x^2dx + 2\int xdx \\ &= \frac{x^3}{3} + c_1 + 2\left(\frac{x^2}{2} + c_2\right) \quad \text{เมื่อ } c_1 \text{ และ } c_2 \text{ เป็นค่าคงตัว} \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 + c \quad \text{เมื่อ } c = c_1 + 2c_2\end{aligned}$$

■

สูตรที่ 5 $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

หมายเหตุ โดยทั่วไป ในการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชัน แทนที่จะบวกค่าคงตัวเมื่อหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของแต่ละฟังก์ชัน เพื่อความสะดวกจะบวกค่าคงตัวเพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 68

จงหา $\int\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)dx &= \int 2xdx-\int\frac{1}{x^2}dx \\ &= 2\int xdx-\int x^{-2}dx \\ &= 2\left(\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)+c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว} \\ &= x^2+\frac{1}{x}+c\end{aligned}$$

■

จากสูตรที่ 3 และ 4 จะได้

ถ้า $k_1, k_2, \ldots, k_n$ เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\int\left(k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)\right)dx = k_1\int f_1(x)dx+k_2\int f_2(x)dx+\cdots+k_n\int f_n(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 69

จงหา $\int\left(3x^6-2x^2+7x+1\right)dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int\left(3x^6-2x^2+7x+1\right)dx &= 3\int x^6dx-2\int x^2dx+7\int xdx+\int 1dx \\ &= \frac{3x^7}{7}-\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+x+c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}\end{aligned}$$

■

การหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนด $\frac{dy}{dx}=f(x)$ มาให้ สามารถทำได้ดังนี้

จาก $\frac{dy}{dx} = f(x)$

ดังนั้น $\int \frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx$

หรือ $y = \int f(x)dx$

ตัวอย่างที่ 70

ถ้า $\frac{dy}{dx}=5x^4+3x^2-2$ จงหา y

วิธีทำ จาก $\frac{dy}{dx} = 5x^4+3x^2-2$

จะได้ $y = \int(5x^4+3x^2-2)dx$

$= 5\int x^4dx+3\int x^2dx-2\int 1dx$

$= \frac{5x^5}{5}+\frac{3x^3}{3}-2x+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= x^5+x^3-2x+c$

ตัวอย่างที่ 71

จงหาสมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(2,1)$ และมีความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ เป็น x^2

วิธีทำ เนื่องจากความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ $\frac{dy}{dx}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=x^2$

จะได้ $y=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น สมการของเส้นโค้ง คือ $y=\frac{x^3}{3}+c$

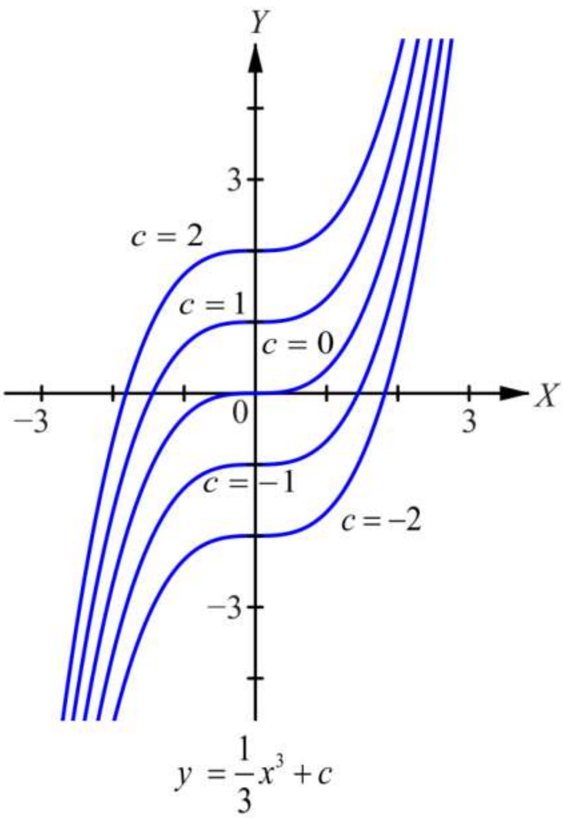
เนื่องจากเส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(2, 1)$

ดังนั้น เมื่อแทน x และ y ในสมการเส้นโค้งด้วย 2 และ 1 ตามลำดับ

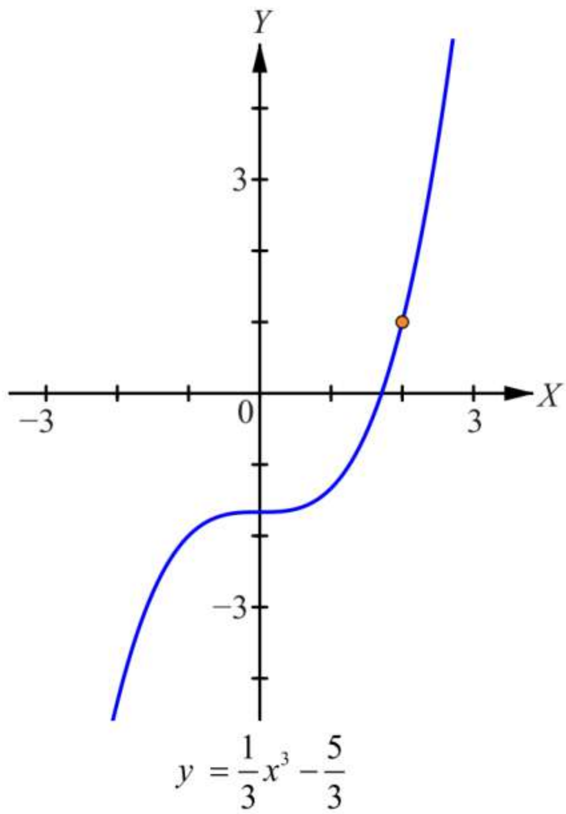
จะได้ $1 = \frac{2^3}{3} + c$ นั่นคือ $c = -\frac{5}{3}$

ดังนั้น สมการของเส้นโค้งที่ต้องการคือ $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$

จากตัวอย่างที่ 71 จะเห็นว่าเส้นโค้ง $y = \frac{x^3}{3} + c$ มีหลายเส้นขึ้นอยู่กับค่าคงตัว c ดังรูปที่ 30 แต่มีเส้นโค้งเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด $(2, 1)$ ดังรูปที่ 31



รูปที่ 30



รูปที่ 31

จากหัวข้อ 2.8.1 ถ้าทราบฟังก์ชันแสดงตำแหน่งของวัตถุ จะสามารถใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ในการหาความเร็วและความเร่งของวัตถุได้ ในทางกลับกันถ้าทราบฟังก์ชันแสดงความเร่งของวัตถุ ก็จะสามารถใช้ความรู้เรื่องปฏิยานุพันธ์ในการหาความเร็วและตำแหน่งของวัตถุได้เช่นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 72

ณ เวลา t ใด ๆ วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวราบด้วยความเร่ง $-3t$ เมตรต่อวินาที^{2} ถ้าขณะที่เริ่มต้นจับเวลา ตำแหน่งของวัตถุอยู่ที่ 3 เมตร และวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตรต่อวินาที จงหา

1) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
2) ตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
3) ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้น ขณะเวลา 2 และ 4 วินาที

วิธีทำ 1) ให้ $v(t)$ แทนความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ

เนื่องจาก $v'(t)=a(t)=-3t$

จะได้ $v(t)=\int(-3t)dt=\frac{-3t^2}{2}+c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจากขณะที่เริ่มต้นจับเวลา วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตรต่อวินาที

ดังนั้น เมื่อแทน t ด้วย 0 และแทน $v(0)$ ด้วย 1 ใน $v(t)=-\frac{3t^2}{2}+c_1$

จะได้ $1=0+c_1$

นั่นคือ $c_1=1$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ $-\frac{3t^2}{2}+1$ เมตรต่อวินาที

2) ให้ $s(t)$ แทนตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ

เนื่องจาก $s'(t)=v(t)=-\frac{3t^2}{2}+1$

จะได้ $s(t)=\int\left(-\frac{3t^2}{2}+1\right)dt=-\frac{t^3}{2}+t+c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจากขณะที่เริ่มต้นจับเวลา ตำแหน่งของวัตถุอยู่ที่ 3 เมตร

ดังนั้น เมื่อแทน t ด้วย 0 และแทน $s(0)$ ด้วย 3 ใน $s(t)=-\frac{t^3}{2}+t+c_2$

จะได้ $3 = 0+0+c_2$

นั่นคือ $c_2 = 3$

ดังนั้น ตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ $-\frac{t^3}{2}+t+3$ เมตร

3) จากข้อ 2) จะได้ระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้น ขณะเวลา 2 วินาที คือ

$$|s(2)-s(0)| = \left|\left(-\frac{2^3}{2}+2+3\right)-\left(-\frac{0^3}{2}+0+3\right)\right| = |-2| = 2 \text{ เมตร}$$

และระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้น ขณะเวลา 4 วินาที คือ

$$|s(4)-s(0)| = \left|\left(-\frac{4^3}{2}+4+3\right)-\left(-\frac{0^3}{2}+0+3\right)\right| = |-28| = 28 \text{ เมตร}$$

■

ตัวอย่างที่ 73

เมื่อปล่อยวัตถุตกจากที่สูงแบบเสรี วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร่งโน้มถ่วงของโลก (g) ถ้ากำหนด $g=-9.8$ เมตรต่อวินาที^{2} และขณะที่เริ่มต้นจับเวลา ตำแหน่งของวัตถุอยู่ที่ 10 เมตร และวัตถุมีความเร็วเป็นศูนย์ จงหา

1) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
2) ตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ

วิธีทำ 1) ให้ $v(t)$ แทนความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ

เนื่องจาก $v'(t)=g=-9.8$

จะได้ $v(t)=\int(-9.8)dt=-9.8t+c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจากขณะที่เริ่มต้นจับเวลา วัตถุมีความเร็วเป็นศูนย์

ดังนั้น เมื่อแทน t ด้วย 0 และแทน $v(0)$ ด้วย 0 ใน $v(t)=-9.8t+c_1$

จะได้ $c_1=0$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ $-9.8t$ เมตรต่อวินาที

2) ให้ $s(t)$ แทนตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ

เนื่องจาก $s'(t)=v(t)=-9.8t$

จะได้ $s(t)=\int(-9.8t)dt=-4.9t^2+c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจากขณะที่เริ่มต้นจับเวลา ตำแหน่งของวัตถุอยู่ที่ 10 เมตร
ดังนั้น เมื่อแทน t ด้วย 0 และแทน $s(0)$ ด้วย 10 ใน $s(t) = -4.9t^2 + c_2$
จะได้ $c_2 = 10$
ดังนั้น ตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ $-4.9t^2 + 10$ เมตร ■

ตัวอย่างที่ 74

โยนวัตถุชิ้นหนึ่งขึ้นจากพื้นดินในแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น 19.6 เมตรต่อวินาที ถ้ากำหนดความเร่งโน้มถ่วงของโลกเท่ากับ -9.8 เมตรต่อวินาที^{2} และขณะที่เริ่มต้นจับเวลา ตำแหน่งของวัตถุอยู่ที่ศูนย์ จงหา

1) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
2) ตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
3) เวลาที่วัตถุตกถึงพื้นดิน
4) เวลาที่วัตถุขึ้นไปถึงตำแหน่งสูงสุด และตำแหน่งสูงสุดของวัตถุ

วิธีทำ 1) ให้ $v(t)$ แทนความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
เนื่องจาก $v'(t) = -9.8$
จะได้ $v(t) = \int(-9.8)\,dt = -9.8t + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว
เนื่องจากวัตถุมีความเร็วต้น 19.6 เมตรต่อวินาที
ดังนั้น เมื่อแทน t ด้วย 0 และแทน $v(0)$ ด้วย 19.6 ใน $v(t) = -9.8t + c_1$
จะได้ $c_1 = 19.6$
ดังนั้น ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ $-9.8t + 19.6$ เมตรต่อวินาที

2) ให้ $s(t)$ แทนตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
เนื่องจาก $s'(t) = v(t) = -9.8t + 19.6$
จะได้ $s(t) = \int(-9.8t + 19.6)\,dt = -4.9t^2 + 19.6t + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจากขณะที่เริ่มต้นจับเวลา ตำแหน่งของวัตถุอยู่ที่ศูนย์
ดังนั้น เมื่อแทน t ด้วย 0 และแทน $s(0)$ ด้วย 0 ใน $s(t) = -4.9t^2 + 19.6t + c_2$
จะได้ $c_2 = 0$
ดังนั้น ตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ คือ $-4.9t^2 + 19.6t$ เมตร

3) วัตถุตกถึงพื้นดินเมื่อตำแหน่งของวัตถุเป็นศูนย์

นั่นคือ
$$\begin{aligned} -4.9t^2 + 19.6t &= 0 \\ -4.9t(t-4) &= 0 \\ t(t-4) &= 0 \end{aligned}$$
จะได้ $t = 0$ หรือ $t = 4$
ดังนั้น วัตถุตกถึงพื้นดิน เมื่อเวลาผ่านไป 4 วินาที

4) จาก $s'(t) = -9.8t + 19.6$

ถ้า $s'(t) = 0$

แล้วจะได้
$$\begin{aligned} -9.8t + 19.6 &= 0 \\ -9.8t &= -19.6 \\ t &= 2 \end{aligned}$$
ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน s ในช่วงเปิด $(0, 4)$ คือ 2
เนื่องจาก $s(2) = -4.9(2^2) + 19.6(2) = 19.6$
และจาก 3) จะได้ $s(0) = s(4) = 0$
สรุปได้ว่าฟังก์ชัน s มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $t = 2$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $s(2) = 19.6$
ดังนั้น วัตถุขึ้นไปถึงตำแหน่งสูงสุด เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที และตำแหน่งสูงสุดของวัตถุคือ 19.6 เมตร

ตัวอย่างที่ 75

สมมติว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของการใช้โทรศัพท์มือถือทั่วโลก (มีหน่วยเป็นล้านเครื่องต่อปี) ในปีที่ x นับจาก ค.ศ. 2000 สามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชัน $S'(x) = 56x + 166$ ถ้าใน ค.ศ. 2011 มีการใช้โทรศัพท์มือถือทั่วโลก 5,960 ล้านเครื่อง จงหาฟังก์ชันแสดงจำนวนการใช้โทรศัพท์มือถือทั่วโลกในปีที่ x นับจาก ค.ศ. 2000

วิธีทำ เนื่องจาก $S'(x) = 56x + 166$

ดังนั้น $S(x) = \int (56x + 166)\,dx$

$= 28x^2 + 166x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $S(11) = 5,960$

ดังนั้น $28(11)^2 + 166(11) + c = 5,960$

$c = 746$

จะได้ $S(x) = 28x^2 + 166x + 746$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงจำนวนการใช้โทรศัพท์มือถือทั่วโลก ในปีที่ x นับจาก ค.ศ. 2000 คือ $S(x) = 28x^2 + 166x + 746$ ■

แบบฝึกหัด 2.9

1. จงแสดงว่า $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

2. จงหา

1) $\int (x^4 + 3x^2 + 5x)\,dx$

2) $\int (2x^3 - 3x^2 + 6 - 2x^{-2})\,dx$

3) $\int \left(x^{10} - \dfrac{1}{x^3}\right)dx$

4) $\int \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^4}\right)dx$

5) $\int \sqrt{x}\,dx$

6) $\int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\right)dx$

7) $\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

8) $\int x^2(x-3)dx$

9) $\int\sqrt{x}(x+1)dx$

10) $\int\left(\frac{x-2}{x^3}\right)dx$

11) $\int\left(x^2+5x+1\right)dx$

12) $\int\left(6\sqrt{x}+15\right)dx$

13) $\int\left(x^3+5x^2+6\right)dx$

14) $\int\left(\frac{6}{\sqrt{x}}+8\sqrt{x}\right)dx$

15) $\int\left(x^4-12x^3+6x^2-10\right)dx$

3. ถ้า $f'(x)=x$ และ $f(2)=2$ แล้ว จงหา $f(x)$

4. กำหนดให้ $f''(x)=-2$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{R}$ และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เป็น 2 เมื่อ $x=1$ จงหา $f(x)$

5. จงหาสมการของเส้นโค้ง เมื่อกำหนดความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ และจุดที่เส้นโค้งผ่าน ดังนี้
   1) ความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ x^2-3x+2 และผ่านจุด $(2,1)$
   2) ความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ $2x^3+4x$ และผ่านจุด $(0, 5)$
   3) ความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ $6+3x^2-2x^4$ และผ่านจุด $(1, 0)$

6. จงหาความเร็วของวัตถุ $v(t)$ และตำแหน่งของวัตถุ $s(t)$ ขณะเวลา t ใด ๆ เมื่อกำหนดความเร่งของวัตถุ $a(t)$ ความเร็วและตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา $t=0$ ดังนี้
   1) $a(t)=6-2t,\ 0\le t\le 3;\ v(0)=5,\ s(0)=0$
   2) $a(t)=120t-12t^2,\ 0\le t\le 10;\ v(0)=0,\ s(0)=4$
   3) $a(t)=t^2+5t+4,\ 0\le t\le 15;\ v(0)=-2,\ s(0)=-3$

7. โยนวัตถุชิ้นหนึ่งขึ้นจากพื้นดินในแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น 98 เมตรต่อวินาที ถ้ากำหนดความเร่งโน้มถ่วงของโลกเท่ากับ -9.8 เมตรต่อวินาที^{2} และขณะที่เริ่มต้นจับเวลา ตำแหน่งของวัตถุอยู่ที่ศูนย์ จงหา

1) ตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ
2) เวลาที่วัตถุขึ้นไปถึงตำแหน่งสูงสุด และตำแหน่งสูงสุดของวัตถุ
3) เวลาที่วัตถุอยู่ในตำแหน่งที่สูงจากพื้นดิน 249.9 เมตร

8. รถไฟขบวนหนึ่งแล่นออกจากสถานี โดยขณะเริ่มต้น ตำแหน่งของรถไฟอยู่ที่ศูนย์และรถไฟมีความเร็วเป็นศูนย์ ถ้า ณ เวลา t ใด ๆ รถไฟแล่นด้วยความเร่ง $\frac{1}{4}(20-t)$ เมตรต่อวินาที^{2} จนวินาทีที่ 20 หลังจากนั้นรถไฟแล่นต่อไปด้วยความเร็วเท่าเดิมโดยตลอด จงหาว่าหลังจากวินาทีที่ 20 รถไฟแล่นด้วยความเร็วเท่าใด และเมื่อเวลาผ่านไป 30 วินาที รถไฟจะอยู่ห่างจากสถานีต้นทางเป็นระยะทางเท่าใด

9. จากการทดลองเพาะเลี้ยงปรสิตในจานเพาะเชื้อ พบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนปรสิต (มีหน่วยเป็นตัวต่อสัปดาห์) ณ เวลา t สัปดาห์ คือ $\frac{dN(t)}{dt} = 1{,}200t^2 - 15t^4$ จงหาจำนวนปรสิต ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อกำหนดให้จำนวนปรสิตเริ่มต้นคือ 600 ตัว

10. ต้นไม้ต้นหนึ่งมีอัตราการเติบโตเป็น $\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{4}t^{\frac{1}{4}}$ โดยที่ $H(t)$ แทนความสูง (มีหน่วยเป็นเมตร) ณ เวลา t ปี ถ้าต้นไม้สูง 1 เมตร ณ เวลาเริ่มต้น จงหาว่าต้นไม้ต้นนี้จะสูงเท่าใด ณ เวลา t ปี

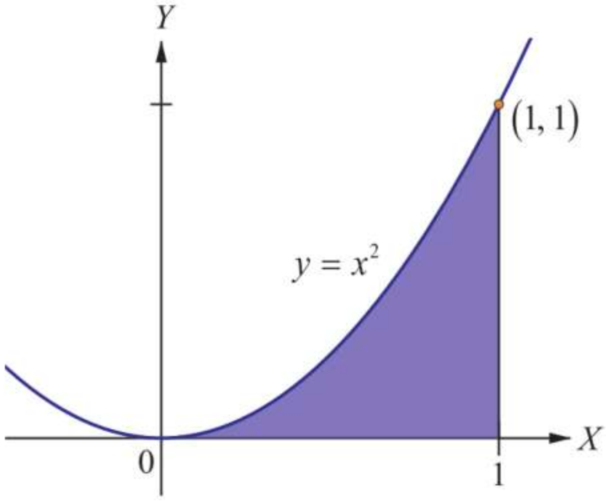
11. บริษัทแห่งหนึ่งพบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าใช้จ่ายสำหรับงานชนิดหนึ่ง (มีหน่วยเป็นร้อยบาทต่อวัน) คือ $E(x) = 120x + 60$ เมื่อ x แทนจำนวนวันนับตั้งแต่เริ่มงาน จงหา
1) ค่าใช้จ่ายรวม หากงานดังกล่าวใช้เวลา 10 วัน
2) ค่าใช้จ่ายรวมนับตั้งแต่วันที่ 10 ถึง 25

12. อัตราการเปลี่ยนแปลงของการใช้พลังงานในบ้านอยู่อาศัย (มีหน่วยเป็นล้านล้านบีทียูต่อปี) ในปีที่ x นับจาก ค.ศ. 2000 สามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชัน $f(x) = 2.17x^2 - 9.74x + 19.956$ โดยที่ $15 \le x \le 40$ จงหาการใช้พลังงานในบ้านอยู่อาศัยทั้งหมดตั้งแต่ ค.ศ. 2015 ถึง 2040

2.10 ปริพันธ์จำกัดเขต

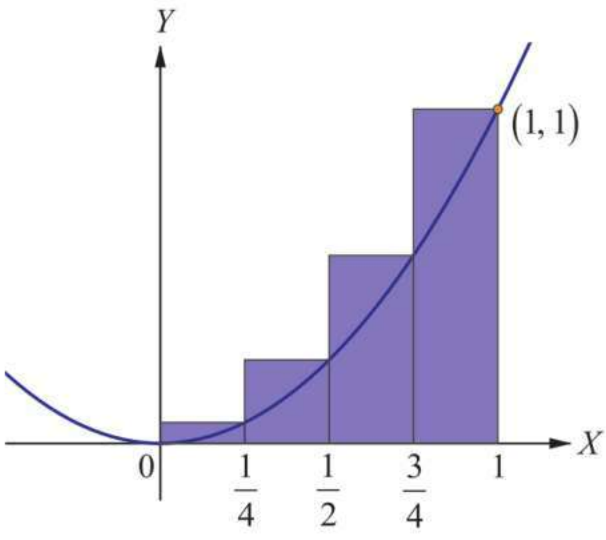
บทนิยามของอนุพันธ์ที่นักเรียนได้ศึกษาในหัวข้อ 2.3 มีแนวคิดมาจากการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง ส่วนบทนิยามของปริพันธ์จำกัดเขตที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้ มีแนวคิดมาจากการหาพื้นที่ ดังนั้น เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจเรื่องปริพันธ์จำกัดเขต จะเริ่มต้นหัวข้อนี้ด้วยตัวอย่างเกี่ยวกับการหาพื้นที่ ดังนี้

พิจารณาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ แกน X และเส้นตรง $x = 1$ จะได้ว่าบริเวณที่ต้องการหาพื้นที่คือบริเวณที่แรเงาดังรูป



รูปที่ 32

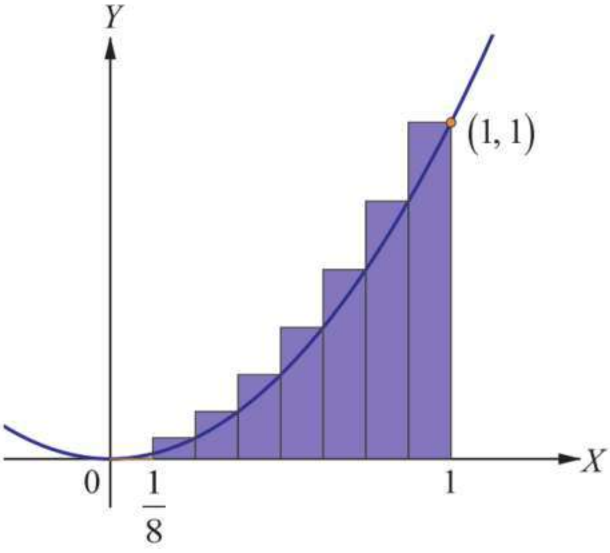
เนื่องจากไม่มีสูตรโดยตรงที่ใช้ในการหาพื้นที่ของบริเวณที่แรเงา จึงจะประมาณพื้นที่ดังกล่าวด้วยพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็ก ๆ หลาย ๆ รูปที่ให้พื้นที่ใกล้เคียงกับพื้นที่ที่กำหนด เริ่มจากแบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ออกเป็นช่วงย่อย โดยที่แต่ละช่วงย่อยมีความกว้างเท่ากัน จากนั้นสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนแต่ละช่วงย่อย โดยมีช่วงย่อยบนแกน X เป็นฐานของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และค่าของฟังก์ชัน f ที่จุดใดจุดหนึ่งบนช่วงย่อยนั้นเป็นความสูงของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เพื่อความสะดวก ในที่นี้จะเลือกค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายทางขวาของแต่ละช่วงย่อย



รูปที่ 33

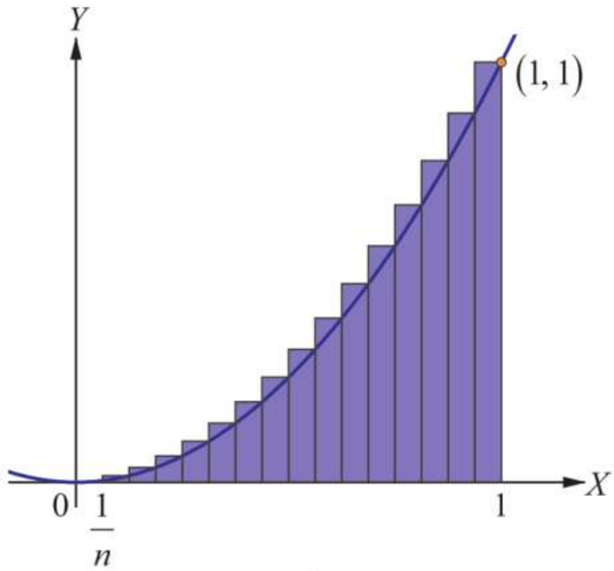
จากรูปที่ 33 ได้แบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ออกเป็น 4 ช่วงย่อยที่มีความกว้างเท่ากัน และเลือกค่าของฟังก์ชัน f ที่จุดปลายทางขวาของแต่ละช่วงย่อยเป็นความสูงของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีช่วงย่อยบนแกน X เป็นฐาน จะได้ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งสี่รูปคือ $\frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}f\left(\frac{2}{4}\right)+\frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}f(1)$ ซึ่งเป็นค่าประมาณของพื้นที่ของบริเวณที่ต้องการ

เพื่อให้ได้ค่าประมาณใกล้เคียงกับพื้นที่ของบริเวณที่ต้องการยิ่งขึ้น จะแบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ให้มีช่วงย่อยมากขึ้น



รูปที่ 34

จากรูปที่ 34 ได้แบ่งช่วงปิด $[0,1]$ ออกเป็น 8 ช่วงย่อยที่มีความกว้างเท่ากัน และเลือกค่าของฟังก์ชัน f ที่จุดปลายทางขวาของแต่ละช่วงย่อยเป็นความสูงของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีช่วงย่อยบนแกน X เป็นฐาน จะได้ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งแปดรูปคือ $\frac{1}{8}f\left(\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}f\left(\frac{2}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{8}f(1)$ ซึ่งเป็นค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพื้นที่ของบริเวณที่ต้องการมากขึ้น



รูปที่ 35

โดยทั่วไป ถ้าแบ่งช่วงปิด $[0,1]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยที่มีความกว้างเท่ากัน และเลือกค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายทางขวาของแต่ละช่วงย่อยเป็นความสูงของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีช่วงย่อยบนแกน X เป็นฐาน ดังรูปที่ 35 แล้ว

เมื่อให้ S_n แทนผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้ง n รูป

จะได้
$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2
\end{aligned}
$$

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

นั่นคือ $S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

จากรูปที่ 33 – 35 จะเห็นว่า ถ้าแบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว เมื่อ n มากขึ้น จะได้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพื้นที่ของบริเวณที่ต้องการมากขึ้น และเมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว จะได้ว่าลำดับ S_n จะลู่เข้าสู่จำนวนซึ่งเป็นพื้นที่ของบริเวณที่ต้องการ เมื่อหาลิมิตของลำดับ S_n จะได้

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่ต้องการเท่ากับ $\frac{1}{3}$ ตารางหน่วย

จากกระบวนการที่ใช้ในการหาพื้นที่ดังตัวอย่างข้างต้น สามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$

ขั้นที่ 1 แบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยที่มีความกว้างเท่ากัน จะได้ว่าแต่ละช่วงย่อยกว้าง $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ และให้จุดปลายของแต่ละช่วงย่อยอยู่ที่ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

ขั้นที่ 2 เลือกค่า x_i^* ในแต่ละช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ และหา $S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$

ขั้นที่ 3 หาลิมิต $\lim_{n\to\infty} S_n$

ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ มีค่า จะเรียก $\lim_{n\to\infty} S_n$ ว่า **ปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral)** ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a, b]$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$

เรียก a ว่า **ลิมิตล่าง (lower limit)** ของปริพันธ์

เรียก b ว่า **ลิมิตบน (upper limit)** ของปริพันธ์

เขียนสรุปในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

ดังนั้น ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx$ จะเป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X จาก a ถึง b

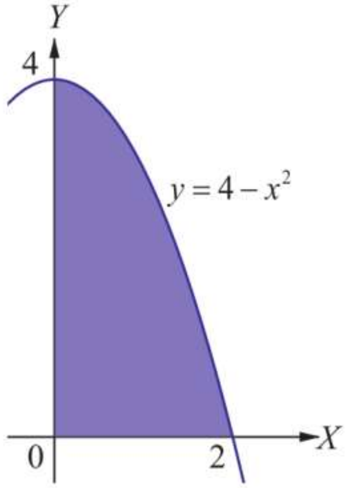
หมายเหตุ 1. จากขั้นที่ 2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว ไม่ว่าจะเลือกค่า x_i^* เป็นค่าใดในช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ค่าของปริพันธ์จำกัดเขตที่ได้จะเท่ากันเสมอ

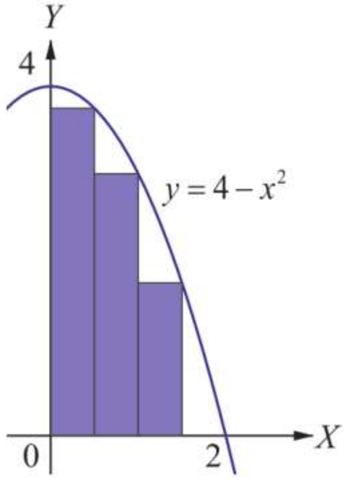
2. ขั้นตอนการหาพื้นที่ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ ได้อีก เช่น ในฟิสิกส์ ใช้หางานที่เกิดจากแรงกระทำที่มีขนาดไม่สม่ำเสมอ และในคณิตศาสตร์ขั้นสูง ใช้หาปริมาตรของรูปเรขาคณิตในปริภูมิ

ตัวอย่างที่ 76

จงหาพื้นที่ของบริเวณในจตุภาคที่ 1 ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 4 - x^2$ เส้นตรง $x = 0$ และเส้นตรง $y = 0$

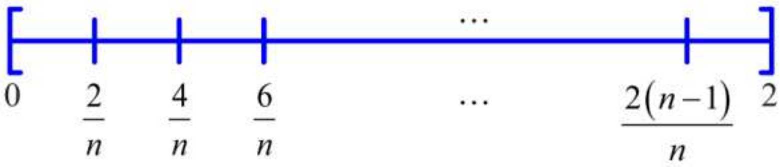
วิธีทำ บริเวณที่ต้องการหาพื้นที่คือบริเวณที่แรเงาดังรูปซ้าย





หาจุดตัดแกน X โดยให้ $4-x^2=0$ จะได้ $x=2$ หรือ $x=-2$ แต่เนื่องจากต้องการหาพื้นที่ของบริเวณในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น ช่วงบนแกน X ของบริเวณที่ต้องการ คือ ช่วงปิด $[0, 2]$ และสามารถหาพื้นที่ของบริเวณที่ต้องการได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งช่วงปิด $[0, 2]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยที่มีความกว้างเท่ากัน จะได้ว่าแต่ละช่วงย่อยกว้าง $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ และจุดปลายของแต่ละช่วงย่อย คือ $0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)}{n}, \frac{2n}{n} = 2$



ขั้นที่ 2 เลือกจุดหนึ่งจุดในแต่ละช่วงย่อย สมมติว่าเลือกจุดปลายทางขวาของแต่ละช่วงย่อย

จะได้
$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{2}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{2}{n}f\left(\frac{4}{n}\right)+\cdots+\frac{2}{n}f\left(\frac{2n}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(\left(4-\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)+\left(4-\left(\frac{4}{n}\right)^2\right)+\cdots+\left(4-\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right)\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(4n-\left(\frac{2}{n}\right)^2-\left(\frac{4}{n}\right)^2-\cdots-\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(4n-\left(\frac{2}{n}\right)^2\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(4n-\frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right) \\
&= 8-\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} \\
&= 8-\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)$

$= 8-\frac{8}{3}$

$= \frac{16}{3}$

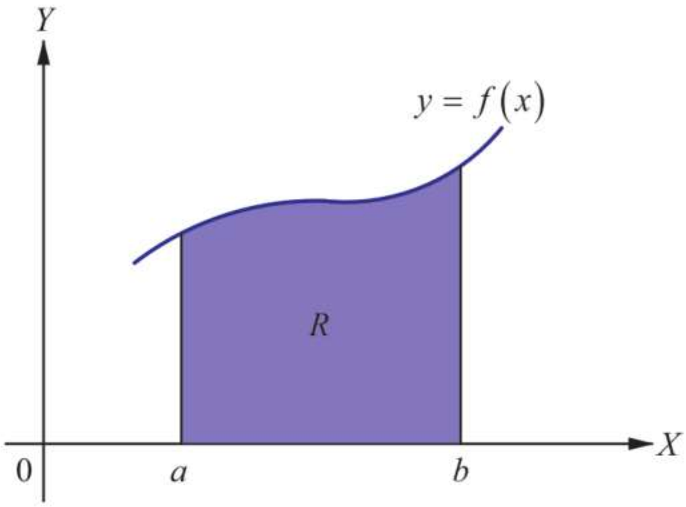
แสดงว่า บริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=4-x^2$ เส้นตรง $x=0$ และเส้นตรง $y=0$ ในจตุภาคที่ 1 มีพื้นที่ $\frac{16}{3}$ ตารางหน่วย ■

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 76 จะได้ว่า $\int_0^2 \left(4-x^2\right)dx = \frac{16}{3}$

จะเห็นว่าการหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ขั้นตอนที่กล่าวมาข้างต้นมีความยุ่งยาก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้าฟังก์ชัน f มีความซับซ้อนมากขึ้น การหา S_n จะทำได้ยากขึ้น

ต่อไปจะแสดงการใช้ความรู้เรื่องปฏิยานุพันธ์ในการหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตโดยไม่ต้องหาลิมิตของลำดับ S_n ซึ่งจะช่วยให้การคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณที่กำหนดสามารถทำได้สะดวกรวดเร็วมากขึ้น

ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก $x\in[a, b]$

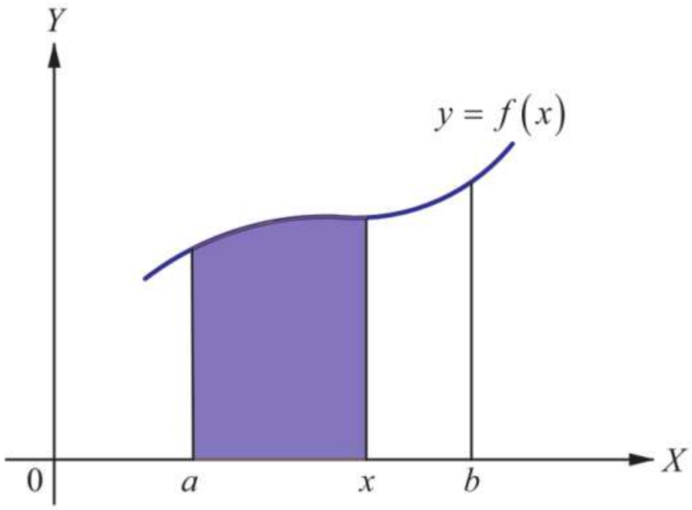


รูปที่ 36

บริเวณ R ที่แรเงาดังรูปที่ 36 เป็นบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ แกน X เส้นตรง $x=a$ และเส้นตรง $x=b$

เรียกพื้นที่ของบริเวณ R ว่า พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ กับแกน X จาก a ถึง b

ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ กับแกน X จาก a ถึง x เมื่อ $a \le x \le b$

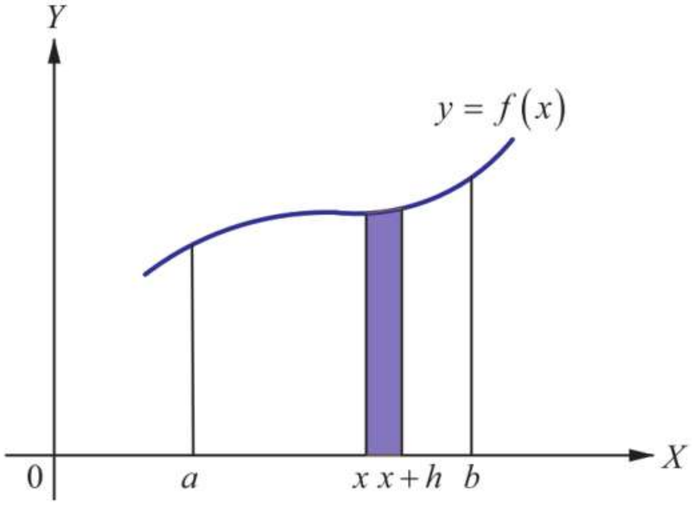


รูปที่ 37

สังเกตว่า

1. $A(a)=0$ (เนื่องจากพื้นที่จาก a ถึง a เท่ากับศูนย์)
2. $A(b)=\int_a^b f(x)dx$ เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ กับแกน X จาก a ถึง b

ต่อไปพิจารณาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ กับแกน X จาก x ถึง $x+h$ เมื่อ $h>0$ ซึ่งเท่ากับ $A(x+h)-A(x)$



รูปที่ 38

ถ้า h มีค่าน้อย ๆ แล้ว $A(x+h)-A(x)$ มีค่าใกล้เคียงกับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ฐานกว้าง h หน่วย และสูง $f(x)$ หน่วย ดังรูปที่ 38

นั่นคือ $A(x+h)-A(x)\approx h\cdot f(x)$

จะได้ $f(x)\approx\dfrac{A(x+h)-A(x)}{h}$

ซึ่งค่าประมาณนี้จะใกล้เคียงมากยิ่งขึ้น เมื่อ h มีค่าน้อย ๆ

ดังนั้น เมื่อ h มีค่าน้อยลงจนเข้าใกล้ศูนย์ จะได้ $f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{A(x+h)-A(x)}{h}$

นั่นคือ $f(x)=A'(x)$

ดังนั้น A เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน f

จะได้ว่าปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของฟังก์ชัน f จะต้องอยู่ในรูป

$F(x)=A(x)+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ------- (1)

แทน x ด้วย a และแทน $A(a)$ ด้วย 0 ใน (1) จะได้ $F(a)=c$

แทน x ด้วย b ใน (1) จะได้ $F(b)=A(b)+c$

ดังนั้น $A(b)=F(b)-c=F(b)-F(a)$

เนื่องจาก $A(b)=\int_a^b f(x)dx$

ดังนั้น $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 13 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus)

กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

การหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสทำได้ดังนี้

1. หาปฏิยานุพันธ์ F ของฟังก์ชัน f นั่นคือ หา $\int f(x)dx$
2. หา $F(b) - F(a)$ ซึ่งจะเป็นค่าของปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$

จะเขียนแทน $F(b) - F(a)$ ด้วยสัญลักษณ์ $F(x)\Big|_a^b$

จะได้ว่า ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

ตัวอย่างที่ 77

จงหา $\int_0^1 x^2 dx$

วิธีทำ สังเกตว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, 1]$

และเนื่องจากปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ คือ $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ $\int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} + c\right)\Big|_0^1$

$= \left(\frac{1}{3} + c\right) - (0 + c) = \frac{1}{3}$ ■

คำตอบที่ได้จากตัวอย่างที่ 77 คือพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ กับแกน X จาก 0 ถึง 1 เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [0, 1]$

ในการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะต้องแทน x ใน $F(x)$ ด้วย a และ b เพื่อหา $F(b) - F(a)$ ซึ่งจะทำให้ค่าคงตัว c ลบกันหมดไป ดังนั้น จากตัวอย่างที่ 77 จะสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้ $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

ตัวอย่างที่ 78

จงหา $\int_0^2 (4 - x^2) dx$

วิธีทำ $\int (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น
$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = \left.\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2$$
$$= \left(4(2) - \frac{2^3}{3}\right) - 0$$
$$= \frac{16}{3}$$

คำตอบที่ได้จากตัวอย่างที่ 78 คือพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 4 - x^2$ กับแกน X จาก 0 ถึง 2 เนื่องจาก $4 - x^2 \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [0, 2]$

ตัวอย่างที่ 79

จงหา $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3}dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx$$

$$= \frac{x^{-2}}{-2} + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + c$$

ดังนั้น

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3}dx = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1}$$

$$= \left(-\frac{1}{2(-1)^2}\right) - \left(-\frac{1}{2(-2)^2}\right)$$

$$= -\frac{3}{8}$$

จากตัวอย่างที่ 79 เนื่องจาก $\frac{1}{x^3} < 0$ สำหรับทุก $x \in [-2, -1]$ ดังนั้น ค่าของ $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3}dx$ จึงไม่ใช่พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \frac{1}{x^3}$ กับแกน X จาก -2 ถึง -1

ตัวอย่างที่ 80

จงหา $\int_{-1}^{2} x^3 dx$

วิธีทำ

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$\text{ดังนั้น } \int_{-1}^{2} x^3 dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}$$

$$= \frac{15}{4}$$

จากตัวอย่างที่ 80 เนื่องจาก $x^3 < 0$ สำหรับทุก $x \in [-1, 0)$ ดังนั้น ค่าของ $\int_{-1}^{2} x^3 dx$ จึงไม่ใช่พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ กับแกน X จาก -1 ถึง 2

แบบฝึกหัด 2.10

1. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

1) $\int_{3}^{4} (x^3 + 3) dx$

2) $\int_{1}^{4} (x^2 - 2x - 3) dx$

3) $\int_{-1}^{1} (4x^3 + 2x) dx$

4) $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$

5) $\int_{2}^{4} \left(x^2 + \frac{3}{x^3}\right) dx$

6) $\int_{-1}^{1} (-x^4 + x^2 - 1) dx$

7) $\int_{0}^{1} x(x^2 + 1) dx$

8) $\int_{0}^{1} x^2 (x^2 + 1)^2 dx$

9) $\int_1^4 \left(2x - \frac{x^3}{3}\right) dx$

10) $\int_0^2 x\left(x^2+1\right)^2 dx$

2. ณ เวลา t ใด ๆ รถยนต์คันหนึ่งวิ่งด้วยความเร่ง $a(t)$ เมตรต่อวินาที^{2} โดยที่ $\int_0^5 a(t)dt = 10$ ถ้ารถยนต์คันนี้วิ่งด้วยความเร็วต้น 20 เมตรต่อวินาที จงหาความเร็วของรถยนต์คันนี้ขณะเวลา 5 วินาที

2.11 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

ในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงปริพันธ์จำกัดเขตโดยพิจารณาจากตัวอย่างการคำนวณหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก a ถึง b เมื่อ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ และพบว่าพื้นที่ดังกล่าวสามารถเขียนได้ในรูปปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ ซึ่งสามารถคำนวณค่าได้ง่าย โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ในหัวข้อนี้จะศึกษาวิธีการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X โดยแยกพิจารณาบนช่วงที่ $f(x) \geq 0$ และบนช่วงที่ $f(x) \leq 0$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 14

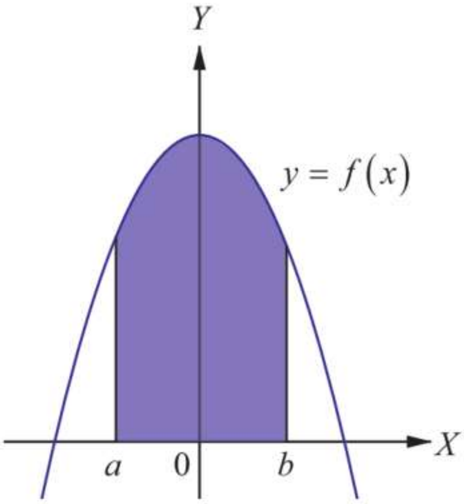
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X จาก a ถึง b

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว

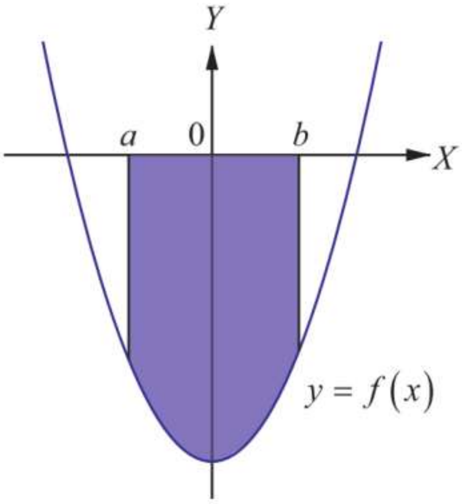
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

2. ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$



รูปที่ 39



รูปที่ 40

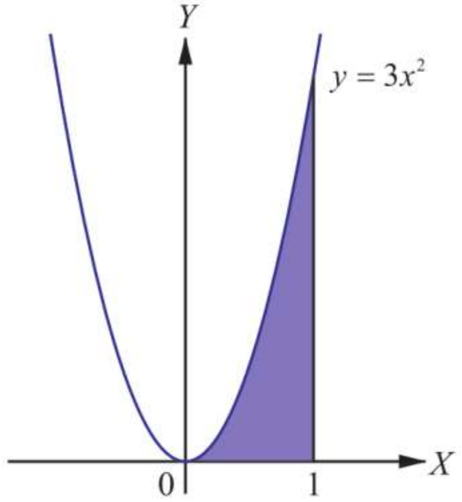
รูปที่ 39 แสดงพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X จาก a ถึง b เมื่อ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า พื้นที่ที่แรเงาเท่ากับ $\int_a^b f(x)dx$

รูปที่ 40 แสดงพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X จาก a ถึง b เมื่อ $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า พื้นที่ที่แรเงาเท่ากับ $-\int_a^b f(x)dx$

ตัวอย่างที่ 81

จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 3x^2$ กับแกน X จาก 0 ถึง 1

วิธีทำ กราฟของ $f(x) = 3x^2$ เป็นพาราโบลาที่เส้นโค้งหงายขึ้น และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [0, 1]$ ดังรูป



ให้พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 3x^2$ กับแกน X จาก 0 ถึง 1 เท่ากับ A ตารางหน่วย
เนื่องจาก $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [0, 1]$

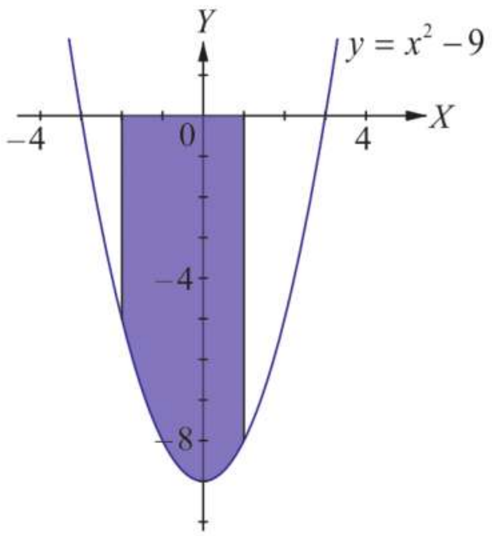
จะได้ $A = \int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$

ดังนั้น พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 3x^2$ กับแกน X จาก 0 ถึง 1 เท่ากับ 1 ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 82

จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $f(x) = x^2 - 9$ กับแกน X จาก -2 ถึง 1

วิธีทำ กราฟของ $f(x) = x^2 - 9$ เป็นพาราโบลาที่เส้นโค้งหงายขึ้น และ $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in [-2, 1]$ ดังรูป



ให้พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $f(x)=x^2-9$ กับแกน X จาก -2 ถึง 1 เท่ากับ A ตารางหน่วย

เนื่องจาก $f(x)\le 0$ สำหรับทุก $x\in[-2,1]$

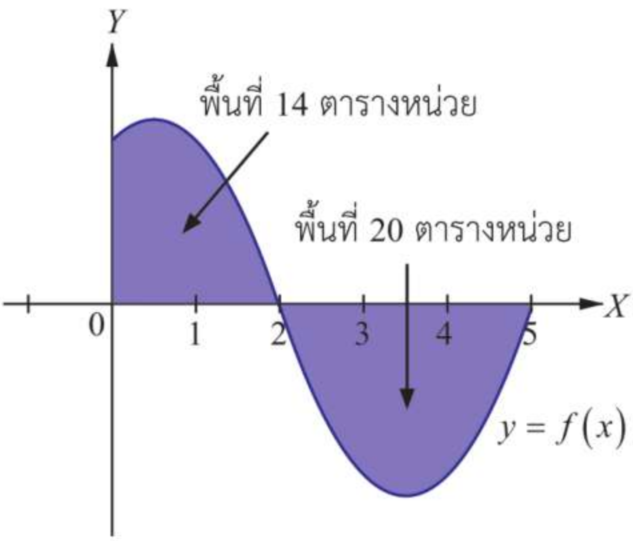
จะได้

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-2}^{1}\left(x^2-9\right)dx \\ &= -\left(\frac{x^3}{3}-9x\right)\Big|_{-2}^{1} \\ &= -\left(\left(\frac{1^3}{3}-9(1)\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}-9(-2)\right)\right) \\ &= 24 \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $f(x)=x^2-9$ กับแกน X จาก -2 ถึง 1 เท่ากับ 24 ตารางหน่วย ■

ตัวอย่างที่ 83

กำหนดพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ ดังรูป ถ้า $F'(x)=f(x)$ และ $F(0)=10$ แล้วจงหา $F(2)$ และ $F(5)$



วิธีทำ เนื่องจาก $\int_0^2 f(x)dx = F(2)-F(0)$

ดังนั้น $14 = F(2)-10$

นั่นคือ $F(2) = 24$

เนื่องจาก $\int_2^5 f(x)dx = F(5)-F(2)$

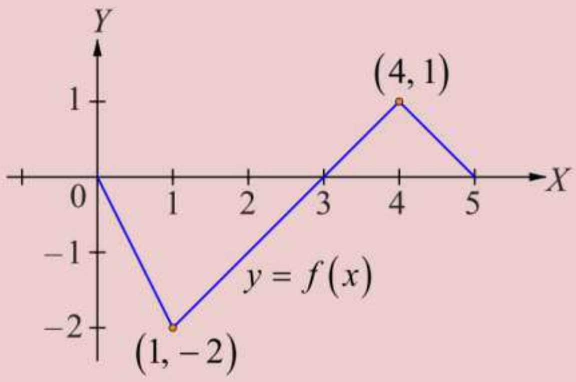
ดังนั้น $-20 = F(5)-24$

นั่นคือ $F(5) = 4$

แบบฝึกหัด 2.11

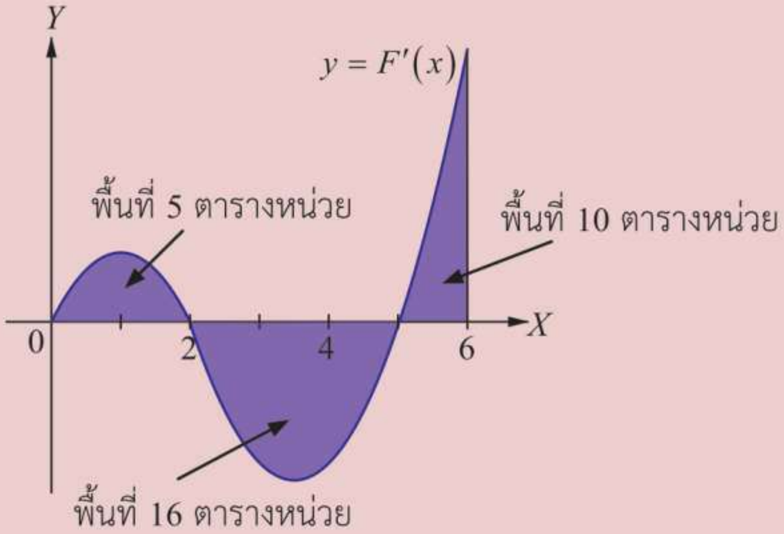
1. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย
   1) เส้นโค้ง $y=x^2$ กับแกน X จาก -3 ถึง 0
   2) เส้นโค้ง $y=x+1$ กับแกน X จาก -1 ถึง 1
   3) เส้นโค้ง $y=6+x-x^2$ กับแกน X จาก -1 ถึง 1
   4) เส้นโค้ง $y=9-x^2$ กับแกน X จาก -3 ถึง 3
   5) เส้นโค้ง $y=x^2-25$ กับแกน X จาก -1 ถึง 3

2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ดังรูป



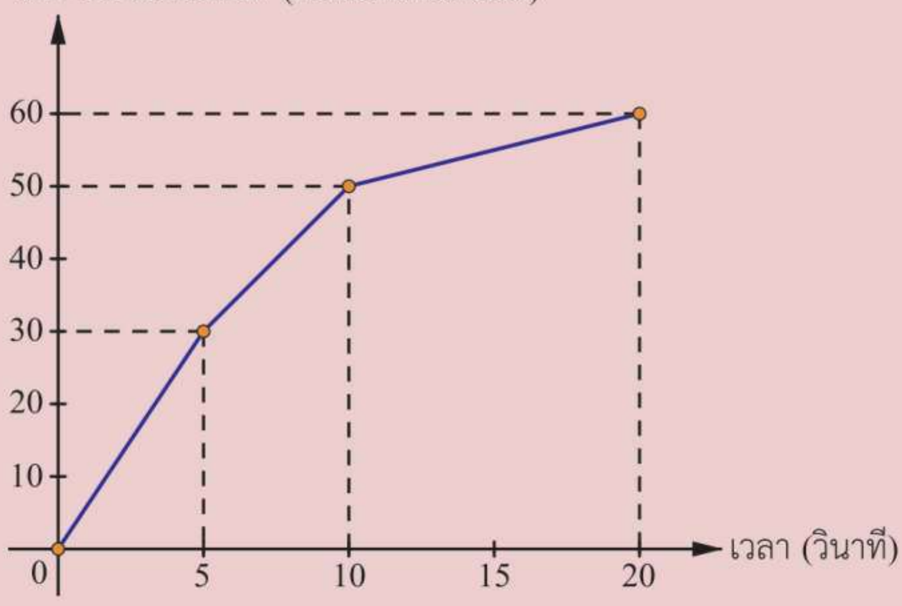
ถ้า $F'(x)=f(x)$ และ $F(0)=0$ แล้ว จงหา $F(b)$ เมื่อ $b\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$

3. กำหนดพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = F'(x)$ ดังรูป



ถ้า $F(0)=3$ จงหา $F(2), F(5)$ และ $F(6)$

4. กำหนดกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราเร็วของรถยนต์คันหนึ่ง (มีหน่วยเป็นกิโลเมตรต่อชั่วโมง) ดังรูป



จงหาระยะทางที่รถยนต์คันนี้แล่นได้ในเวลา 20 วินาที

แบบฝึกหัดท้ายบท

1 จงหาลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1) $\lim_{x\to 0}\left(7x^6-11x^4+9\right)$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^7+x^5+1}{x}$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{|x-1|}}$

5) $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{|x+1|}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+5}{x^2+4x-5}$

7) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x^2-1|}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-4x+4|}{x-2}$

2 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|+1}{1-x} & \text{เมื่อ } x<0\\ x+1 & \text{เมื่อ } 0\le x\le 2\\ x^2-5x+9 & \text{เมื่อ } x>2\end{cases}$$

จงหาลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

2) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

3) $\lim_{x\to 0} f(x)$

4) $\lim_{x\to 2} f(x)$

5) $\lim_{x\to -3} f(x)$

6) $\lim_{x\to \frac{3}{2}} f(x)$

3 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & \text{เมื่อ } x\neq 2 \\ |-x-3| & \text{เมื่อ } x=2 \end{cases}$$

และ $g(x)=|x|$ จงหาลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to -2}\left(5f(x)-4g(x)\right)$

4 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$ หรือไม่

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-x} & \text{เมื่อ } x\neq 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } x=1 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & \text{เมื่อ } x\leq 1 \\ x^2+2 & \text{เมื่อ } x>1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{เมื่อ } x\neq 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } x=1 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-x^{\frac{9}{10}}} & \text{เมื่อ } 0<x<1 \\ 10 & \text{เมื่อ } x\geq 1 \end{cases}$

5 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-7x+10}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่

1) $(-\infty, 2)$

2) $[3, 4)$

3) $(4, 5)$

4) $(5, \infty)$

6 กำหนดให้

$$g(x)=\begin{cases} |x-2| & \text{เมื่อ } x<-2 \\ x+6 & \text{เมื่อ } -2\le x\le 1 \\ x^2-x+6 & \text{เมื่อ } x>1 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่

1) $(-\infty,-3]$
2) $(-2,1]$
3) $[-4, 3]$
4) $(1, \infty)$

7 จงหา a และ b ที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด

1) $f(x)=\begin{cases} ax^2-x-1 & \text{เมื่อ } x\le -2 \\ x-a & \text{เมื่อ } x>-2 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{เมื่อ } x\le 2 \\ |1-x| & \text{เมื่อ } 2<x\le 4 \\ x^2-ax-b & \text{เมื่อ } x>4 \end{cases}$

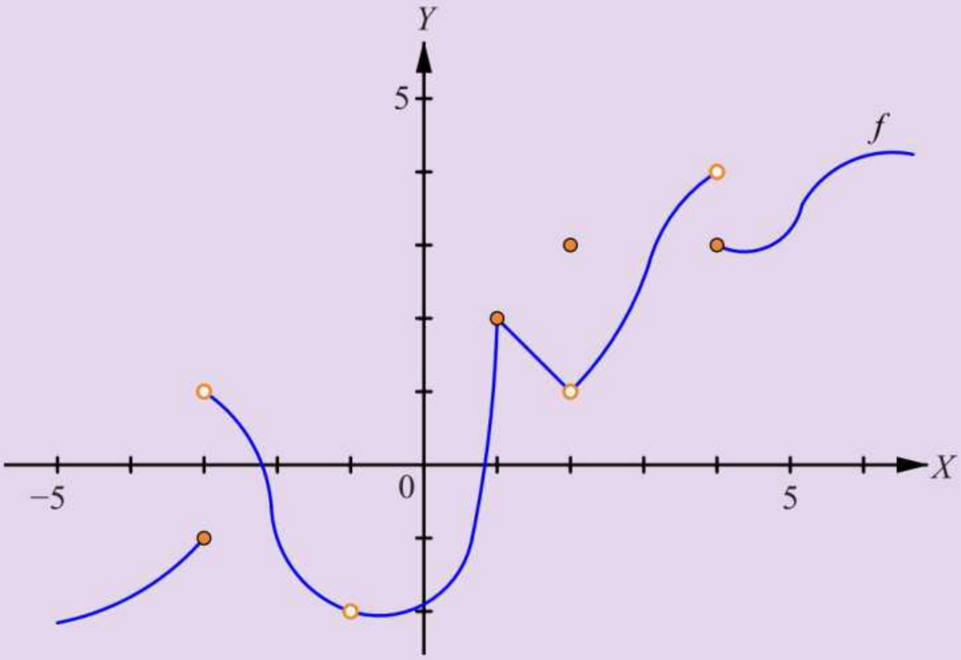
8 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง และ $f(x)=g(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ที่ไม่เท่ากับ 1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด จงพิจารณาว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดด้วยหรือไม่

9 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} ax-1 & \text{เมื่อ } x<1 \\ (2a+b)x-b & \text{เมื่อ } x\ge 1 \end{cases}$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุด และ $f'(2)=2$ จงหา $\lim_{x\to 2} f(x)$

10 กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ดังรูป



1) จงหา

1.1) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$

1.2) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$

1.3) $\lim_{x \to -3} f(x)$

1.4) $\lim_{x \to -1} f(x)$

1.5) $\lim_{x \to 0} f(x)$

1.6) $f(2)$

1.7) $\lim_{x \to 2} f(x)$

1.8) $f(4)$

1.9) $\lim_{x \to 4} f(x)$

2) จากกราฟของฟังก์ชัน f จงพิจารณาว่า

2.1) $\lim_{x \to 4}\left(x^2 + f(x)\right)$ มีค่าหรือไม่ เพราะเหตุใด

2.2) ถ้าต้องการให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = -1$ ควรนิยาม $f(-1)$ ให้มีค่าเป็นเท่าใด

11. ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\lim_{x\to a} f(x)$ มีค่า แต่ $f(a)$ หาค่าไม่ได้ หรือ $f(a)$ หาค่าได้ แต่ $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ แล้วจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชัน**ไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ (removable discontinuity)** ที่ $x = a$

1) จงเขียนตัวอย่างของกราฟของฟังก์ชัน f ที่ไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ที่ $x = a$ เมื่อ $f(a)$ หาค่าไม่ได้
2) จงเขียนตัวอย่างของกราฟของฟังก์ชัน f ที่ไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ที่ $x = a$ เมื่อ $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$
3) กำหนดฟังก์ชัน $f_1(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ และ $f_2(x) = \begin{cases} -x & \text{เมื่อ } x<0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x=0 \\ x & \text{เมื่อ } x>0 \end{cases}$

   3.1) ฟังก์ชัน f_1 และ f_2 ไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ที่ใดบ้าง
   3.2) จะต้องทำอย่างไรเพื่อให้ฟังก์ชัน f_1 และ f_2 ต่อเนื่องที่ทุกจุด

12 จงเขียนตัวอย่างของกราฟของ f และ g ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 1)$ และ f นิยามบนช่วง $[-1, 1]$ แต่ f ไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 1]$
2) ถ้าให้ $g(0) = 1$ แล้วฟังก์ชัน g จะไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 0]$ แต่ถ้าให้ $g(0) = -1$ แล้วฟังก์ชัน g จะต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 0]$

13 ให้ $y = \dfrac{1}{x^2}$ จงหา

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 3
2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.1
3) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.01
4) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 2$

14 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}-2\sqrt{x}$

2) $y=\left(x^2+3x-4\right)^3$

3) $y=\left(4x^2-5x+7\right)^{-5}$

4) $y=x^2\left(2x+1\right)^3$

5) $y=\frac{\left(2x+1\right)^2\left(1-x\right)^3}{x^4}$

6) $y=\left(\frac{6x+1}{2-3x}\right)^5$

7) $y=\frac{\sqrt{x}}{\left(x+1\right)^3}$

8) $y=\frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}$

9) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-6x^3+3}}$

10) $y=\frac{1}{\left(x^5+\sqrt{x^3-x}\right)^{\frac{5}{3}}}$

15 จงหาความชันของเส้นโค้งต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้ และหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดนั้น

1) $y=x^3-3x^2+4$ ที่จุดซึ่ง $x=-1$

2) $y=\frac{x^2-2}{3x-5}$ ที่จุด $(4, 2)$

16 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} |x-2| & \text{เมื่อ } x\le 0 \\ 2-2x-x^2 & \text{เมื่อ } x>0 \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่า f มีเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(0, 2)$ หรือไม่

17 ถ้าเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=2x^2+11x+15$ ที่จุด $(-3, 0)$ ตั้งฉากกับกราฟของฟังก์ชัน $y=mx+c$ ที่จุด $(-3, 0)$ จงหา $c-m$

18 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ จงหา $f'(0)$ และ $f'(1)$

19 จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=4$ ที่จุด $(1,-\sqrt{3})$

20 ถ้าเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=x^3+ax^2+b$ ที่จุด $(-1,3)$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $3y=x$ จงหาพิกัดของจุดตัดของเส้นโค้งนี้กับเส้นตรง $x=1$

21 กำหนดให้ $f(3x+5)=x^2-x+1$ จงหา $f'(2), f''(2)$ และ $f'''(2)$

22 จงหาพหุนามดีกรีสาม $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $P(-1)=2$, $P'(0)=5$, $P''(1)=2$ และ $P''(2)=9$

23 กำหนดให้ $F(x)=g(f(x))$ ถ้า $g(3)=3$, $g'(3)=5$, $f(3)=3$ และ $f'(3)=-2$ จงหา $F'(g(3))$

24 กำหนดให้ $F(x)=f(g(x))$ และ $f(x)=(g(x))^2-4x$ ถ้า $g(1)=1$ และ $g'(1)=5$ จงหา $F'(1)$

25 กำหนดให้ $f(x)=\left(x\cdot g(x)+(g(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}$ ถ้า $g(6)=2$ และ $g'(6)=\dfrac{1}{2}$ จงหา $f'(6)$

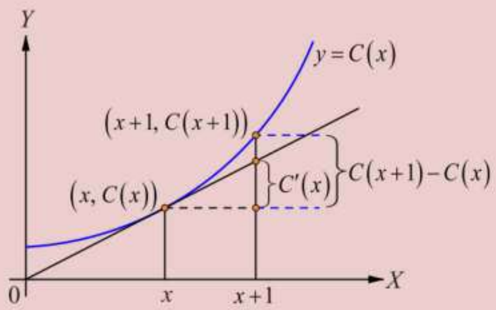
26 ปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อ (มีหน่วยเป็นพันชิ้น) ณ ระดับราคาต่าง ๆ สอดคล้องกับฟังก์ชัน $D(x)=\sqrt{\dfrac{2x^3+1}{x^6}}$ เมื่อ x แทนราคาสินค้าต่อชิ้น (มีหน่วยเป็นบาทต่อชิ้น) จงหา $D(1), D'(1), D(10)$ และ $D'(10)$

27 เจ้าของที่ดินต้องการสร้างคอนโดมิเนียมที่แต่ละชั้นมีห้องพักจำนวน 10 ห้อง บริษัทรับเหมาก่อสร้างคิดค่าก่อสร้างเริ่มต้นที่ 10 ล้านบาท รวมกับค่าก่อสร้างต่อชั้นซึ่งขึ้นกับจำนวนชั้นของอาคาร โดยเริ่มต้นที่ 7.9 ล้านบาทต่อชั้น และแต่ละชั้นที่เพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าก่อสร้างต่อชั้นเพิ่มขึ้น 40,000 บาท ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการสร้างคอนโดมิเนียมสามชั้น จะมีค่าก่อสร้างเริ่มต้น 10 ล้านบาท และค่าก่อสร้างต่อชั้นเป็น $7.9+0.04+0.04=7.98$ ล้านบาท จึงมีค่าก่อสร้างรวมเป็นเงิน $10+3(7.98)=33.94$ ล้านบาท

1) จงเขียนฟังก์ชัน $C(x)$ แสดงค่าก่อสร้างทั้งหมด (มีหน่วยเป็นล้านบาท) เมื่อเจ้าของที่ดินต้องการสร้างคอนโดมิเนียม x ชั้น
2) จงหาต้นทุนที่เพิ่มขึ้น เมื่อเจ้าของที่ดินต้องการเพิ่มจำนวนชั้นของคอนโดมิเนียมจาก 10 เป็น 11 ชั้น
3) จงหา $C'(10)$
4) เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 2) และ 3) ว่าใกล้เคียงกันหรือไม่ และการคำนวณในข้อใดซับซ้อนน้อยกว่า

เสริมสมอง : ต้นทุนหน่วยสุดท้าย

ต้นทุนหน่วยสุดท้าย (marginal cost) หมายถึงต้นทุนที่เพิ่มขึ้นจากการผลิตสินค้าเพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วย สมมติว่า $C(x)$ คือต้นทุนในการผลิตสินค้า x หน่วย ดังนั้น ถ้าต้องการผลิตสินค้าเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งหน่วย ต้นทุนจะเพิ่มเป็น $C(x+1)$ แสดงว่าต้นทุนในการผลิตสินค้าหน่วยสุดท้ายคือ $C(x+1)-C(x)$



จากกราฟ จะเห็นว่า $C(x+1)-C(x)$ มีค่าใกล้เคียงกับ $C'(x)$ ซึ่งคืออนุพันธ์ของ $C(x)$ ที่จุด x ใด ๆ จึงมักนิยมใช้ $C'(x)$ เป็นค่าประมาณของต้นทุนหน่วยสุดท้าย โดยเฉพาะในกรณีที่การคำนวณค่าของ $C(x+1)-C(x)$ มีความยุ่งยากและซับซ้อน จะคำนวณต้นทุนที่เพิ่มขึ้นจากการผลิตสินค้าเพิ่มขึ้นจาก x เป็น $x+1$ หน่วย โดยการคำนวณ $C'(x)$ แทน นั่นคือ ต้นทุนหน่วยสุดท้ายหาได้จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของต้นทุนเทียบกับจำนวนสินค้า ในทำนองเดียวกัน รายรับหน่วยสุดท้าย (marginal revenue) หาได้จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของรายรับเทียบกับจำนวนสินค้า และกำไรหน่วยสุดท้าย (marginal profit) หาได้จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของกำไรเทียบกับจำนวนสินค้า

28 รายได้จากการขายสินค้าชนิดหนึ่งจำนวน x ชิ้น หาได้จาก $R(x) = 400\sqrt{1,000x - x^2}$ เมื่อ $0 \le x \le 1,000$ กำหนดให้รายได้จากการขายสินค้าหน่วยสุดท้ายคือ $R(x+1) - R(x)$

1) จงหารายได้จากการขายสินค้าหน่วยสุดท้ายเมื่อ $x \in \{200, 400, 600, 800\}$
2) จงหา $R'(200)$, $R'(400)$, $R'(600)$ และ $R'(800)$
3) เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 1) และ 2) ว่าใกล้เคียงกันหรือไม่ และการคำนวณในข้อใดซับซ้อนน้อยกว่า

29 ฟังก์ชันแสดงจำนวนสินค้าที่พนักงานคนหนึ่งสามารถตรวจนับสินค้าในคลังได้ เมื่อทำงานเป็นระยะเวลา t ชั่วโมง คือ $F(t) = 60 - \dfrac{140}{\sqrt{12 + t^2}}$

1) จงหา $F'(t)$ เมื่อ $t \in \{5, 10, 20, 40\}$
2) จงพิจารณาว่าคำตอบที่คำนวณได้ในข้อ 1) มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงเมื่อ t เพิ่มขึ้น พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

30 จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 และ 3 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = 5 - 3x^2 + 6x^4 - x^5$
2) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^{-2}}{6}$
3) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 3x\right)\left(2x^3 - 3x^2\right)$
4) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$

31 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{4}{1-2x}$ จงหา $f^{(n)}(x)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

32 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ทุกอันดับได้ทุกจุด และ $F(x) = x f(x)$ จงหา

1) $F'(x), F''(x), F'''(x)$ และ $F^{(4)}(x)$ ในรูปของ x และอนุพันธ์ของ f
2) รูปทั่วไปของ $F^{(n)}(x)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2

33 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ จงระบุช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด

34 กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $f(x)=g\left(x^2-3\right)$ ถ้า $x=1$ เป็นค่าวิกฤต เพียงค่าเดียวของ g จงหาค่าวิกฤตทั้งหมดของ f

35 ถ้า $f(x)=x^3+ax^2-bx+2$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เป็น -1 ที่ $x=1$ จงหา $a+b$

36 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x)=x^4-18x^2$
2) $f(x)=27-2x^4$

37 จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x)=5-2x-x^2$ บนช่วง $[-2, 3]$
2) $f(x)=x^3-6x^2-15x+7$ บนช่วง $[0, 6]$
3) $f(x)=3x^4+6x^3-24x^2+18x-7$ บนช่วง $[-3, 2]$
4) $f(x)=6x^5+15x^4-130x^3-210x^2+720x+976$ บนช่วง $[-2, 4]$

38 กำหนดให้ระยะทางระหว่างจุด P และเส้นโค้ง C คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด P และจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง C จงหา

1) ระยะทางระหว่างจุด $(3,0)$ และเส้นโค้ง $y=x^2$
2) ระยะทางระหว่างจุด $(0,3)$ และเส้นโค้ง $y=x^2$ เมื่อ $-3\le x\le 3$

39 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีความยาวเส้นรอบรูป 6 เซนติเมตร จะต้องมีความยาวฐานเท่าใด จึงจะมีพื้นที่มากที่สุด

40 โรงงานแห่งหนึ่งต้องการผลิตบรรจุภัณฑ์ทรงกระบอกซึ่งมีความจุ 20π ลูกบาศก์เซนติเมตร โดยค่าวัสดุที่ใช้ทำฝาและฐานของทรงกระบอกเท่ากับ 100 บาทต่อตารางเซนติเมตร และค่าวัสดุที่ใช้ทำด้านข้างของทรงกระบอกเท่ากับ 80 บาทต่อตารางเซนติเมตร ถ้าโรงงานต้องการให้ต้นทุนการผลิตบรรจุภัณฑ์ต่ำที่สุด จะต้องออกแบบบรรจุภัณฑ์ให้มีความยาวรัศมีของฐานและความสูงเป็นเท่าใด และจะใช้ต้นทุนเท่าใดในการผลิตบรรจุภัณฑ์ 1 ชิ้น

41. ต้องการทำกรวยกระดาษสำหรับดื่มน้ำที่มีพื้นที่ผิวข้าง 30π ตารางหน่วย จงหาส่วนสูงเอียงและรัศมีของฐานที่ทำให้กรวยมีปริมาตรมากที่สุด

42. กระป๋องทรงกระบอกใบหนึ่งมีพื้นที่ผิวรวมฝา 80π ตารางหน่วย จงหาความสูงและรัศมีของฐานที่ทำให้กระป๋องมีปริมาตรมากที่สุด

43. ในงานประเพณีบุญบั้งไฟ กลุ่มคนรักคณิตได้ส่งบั้งไฟเข้าร่วมการแข่งขันจุดบั้งไฟ ถ้าความสูงของบั้งไฟ (มีหน่วยเป็นเมตร) เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที หาได้จาก

$$h(t)=\begin{cases} 10t^2-\dfrac{t^3}{2} & \text{เมื่อ } 0\le t<10 \\ 625-5(t-15)^2 & \text{เมื่อ } 10\le t\le 15+5\sqrt{5} \end{cases}$$

จงหา

1) $h'(t)$ เมื่อ $t\in\left(0,15+5\sqrt{5}\right)$
2) เวลาที่บั้งไฟขึ้นไปสูงที่สุด และความสูงของบั้งไฟ ณ เวลานั้น

เสริมสมอง : ประเพณีบุญบั้งไฟ

ประเพณีบุญบั้งไฟเป็นประเพณีหนึ่งของภาคตะวันออกเฉียงเหนือของไทย จัดขึ้นเป็นประจำทุกปีในเดือนพฤษภาคมซึ่งเป็นเดือนแห่งการเริ่มต้นฤดูฝน ประเพณีบุญบั้งไฟมีที่มาจากหลากหลายความเชื่อในเรื่องการขอให้ฝนตกต้องตามฤดูกาล โดยชาวบ้านจะรวมตัวกันจัดทำบั้งไฟและประดับตกแต่งให้สวยงาม เมื่อถึงวันรวมบั้งไฟ ชาวบ้านจะนำบั้งไฟแห่ไปรอบ ๆ เมือง ขบวนแห่จะมีการละเล่นที่แสดงถึงวิถีชีวิตของแต่ละแห่ง มีความสนุกสนาน และก่อให้เกิดความสามัคคี สำหรับคืนวันรวมบุญบั้งไฟ บางชุมชนจะจัดให้มีการประกวดตีกลองแข่งกัน ในวันรุ่งขึ้นชาวบ้านจะพากันไปทำบุญตักบาตร ถวายอาหารพระภิกษุสงฆ์ จากนั้นเจ้าของบั้งไฟจะนำบั้งไฟของตนออกมาแห่ไปรอบ ๆ อีกครั้ง แล้วจึงนำบั้งไฟไปจุด หากบั้งไฟของใครพุ่งขึ้น ชาวบ้านจะช่วยกันหามแห่เจ้าของไปรอบ ๆ อย่างสนุกสนาน

44 โรงงานแห่งหนึ่งผลิตเสื้อโดยฟังก์ชันการผลิต คือ $P = 10x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ โดยที่
P แทนจำนวนเสื้อที่ผลิตได้ใน 1 ชั่วโมง (มีหน่วยเป็นตัว)
x แทนจำนวนแรงงานที่ใช้ใน 1 ชั่วโมง
และ y แทนจำนวนปัจจัยทุนที่ใช้ใน 1 ชั่วโมง
จงหาจำนวนเสื้อที่มากที่สุดที่โรงงานแห่งนี้จะผลิตได้ใน 1 ชั่วโมง ภายใต้งบประมาณ 100,000 บาท ถ้าแรงงานหนึ่งหน่วยมีค่าใช้จ่าย 100 บาท และปัจจัยทุนหนึ่งหน่วยมีค่าใช้จ่าย 100 บาท

45 จงหา

1) $\int \left(5x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x + 7\right)dx$
2) $\int \left(3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{3}{4}} - x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$
3) $\int \left(3x^2 + \sqrt{x} + 1\right)dx$
4) $\int (2x)\left(x^2 + 1\right)^2 dx$
5) $\int \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$
6) $\int \sqrt{x}\left(x^3 + x^2 + x + 1\right)dx$
7) $\int \frac{x^2 + x^3}{x^5}dx$
8) $\int \left(x^2 + 1\right)\left(x^4 - x^2 + 1\right)dx$

46 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f''(x) = 6x - 2$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เป็น -1 ที่ $x = 1$ จงหา $f(x)$

47 จงหาสมการของเส้นโค้ง เมื่อกำหนดความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ และจุดที่เส้นโค้งผ่าน ดังนี้

1) ความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ $4x^3 + 9x^2 - 5$ และผ่านจุด $(0, 5)$
2) ความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ คือ $5 - 3\sqrt{x} - x^3$ และผ่านจุด $(4, -2)$

48 จงหาความเร่งของวัตถุ $a(t)$ และตำแหน่งของวัตถุ $s(t)$ ขณะเวลา t ใด ๆ เมื่อกำหนดความเร็วของวัตถุ $v(t)$ และตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา $t = 3$ ดังนี้

1) $v(t) = 5t^2 - 2t - 8, 0 \le t \le 16; s(3) = 6$
2) $v(t) = 5t - 6t^2 - 4t^3, 0 \le t \le 8; s(3) = -4$

49. กำหนดให้ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ จงหา $\int\left(\frac{x^2+3x+2xf(x)+6f(x)}{x+3}\right)dx$ ในรูปของ x และ $F(x)$

50 ในเหตุการณ์ไฟป่าครั้งหนึ่ง อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนต้นไม้ที่ถูกเผา เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง คือ $\frac{dN}{dt}=6\sqrt{t}$ ถ้า ณ เวลาเริ่มต้น มีต้นไม้ที่ถูกเผา 100 ต้น จงหาว่าจะมีต้นไม้ถูกเผากี่ต้น เมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง

51 พนักงานที่มีประสบการณ์จะใช้เวลาในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งลดลง สมมติว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนชั่วโมงที่พนักงานคนหนึ่งใช้ในการผลิตสินค้า x ชิ้น คือ $H'(x)=25-2x$ เมื่อ $0\le x\le 12$ จงหาจำนวนชั่วโมงที่พนักงานคนนี้ใช้ในการผลิตสินค้า 6 ชิ้นแรก และ 12 ชิ้นแรก พร้อมทั้งอธิบายความหมาย

52 ถ้าวัตถุเริ่มเคลื่อนที่ในแนวตรงจากหยุดนิ่งที่ตำแหน่งศูนย์เมตรด้วยความเร่งคงที่ a เมตรต่อวินาที^{2} จงหาฟังก์ชันแสดงตำแหน่งของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ

53 เมื่อปาวัตถุในแนวดิ่งลงมาจากดาดฟ้าตึกแห่งหนึ่ง ถ้าความสูงของวัตถุจากพื้นดิน (มีหน่วยเป็นเมตร) ขณะเวลา t วินาที หาได้จาก $s(t)=-4.9t^2-t+20$ จงหา

1) ความสูงของดาดฟ้าตึก
2) ความเร็วต้นของวัตถุ
3) ขณะที่วัตถุมีความเร็ว -10.8 เมตรต่อวินาที วัตถุอยู่สูงจากพื้นดินกี่เมตร

☆ 54. รถยนต์ 2 คัน วิ่งตามกันบนถนนสายตรงที่อนุญาตให้รถเดินทางเดียว ด้วยความเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมงเท่ากัน และอยู่ห่างกัน $\frac{1}{36}$ กิโลเมตร เนื่องจากถนนโล่งมาก ณ เวลาหนึ่ง รถทั้งสองจึงเร่งเครื่องพร้อมกัน โดยรถคันหน้าวิ่งด้วยความเร่ง 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง^2 ในขณะที่รถคันหลังวิ่งด้วยความเร่ง 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง^2 ถ้าคนขับรถยนต์ทั้งสองคันไม่ลดความเร่ง จะเกิดเหตุการณ์ใดขึ้น เมื่อเวลาผ่านไป 2 นาที

55 จงหาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

1) $\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x^2+3\right)dx$

2) $\int_{1}^{3}\left(4-5x^4\right)dx$

3) $\int_{1}^{4}\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$

4) $\int_{-1}^{1}(x+1)(x+3)\,dx$

⭐ 5) $\int_{4}^{9}\left(\frac{x-1}{x+\sqrt{x}}\right)dx$

6) $\int_{-2}^{1}|x+2|\,dx$

7) $\int_{1}^{64}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\right)dx$

⭐ 8) $\int_{8}^{27}\left(\frac{x-1}{x-x^{\frac{2}{3}}}\right)dx$

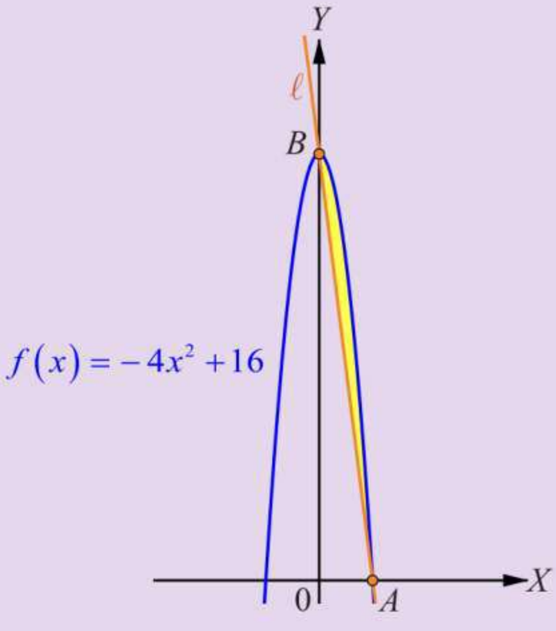
56 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย

1) เส้นโค้ง $y=-3x+7$ กับแกน X จาก -5 ถึง 2

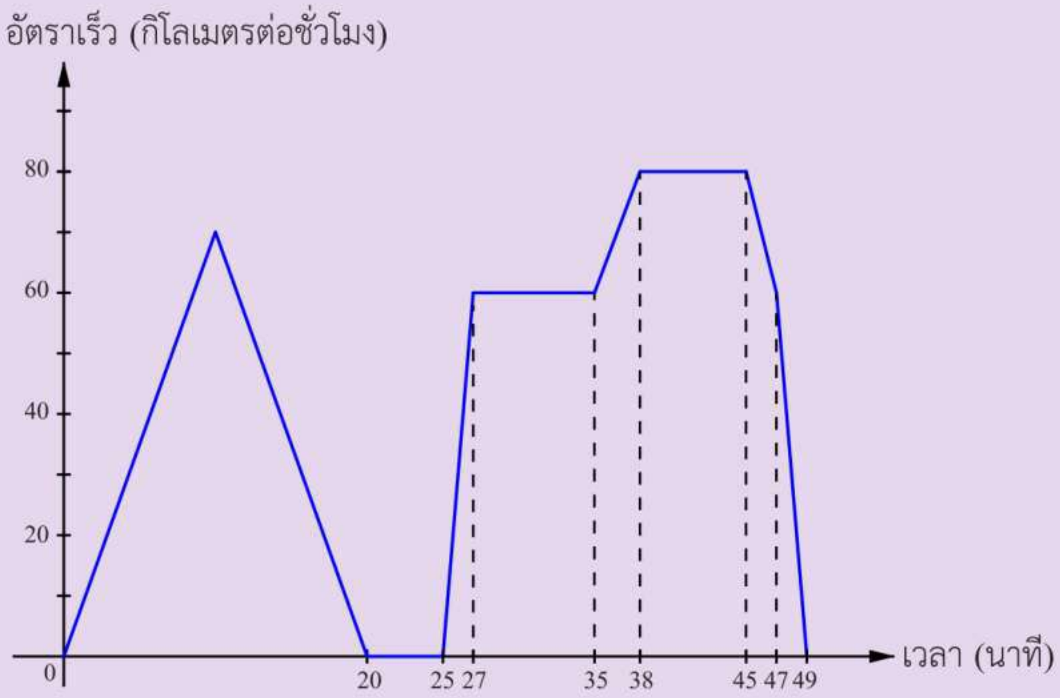
2) เส้นโค้ง $y=3x^2-2x-1$ กับแกน X จาก 1 ถึง 3

3) เส้นโค้ง $y=12-x-x^2$ กับแกน X จาก -6 ถึง -4

57 จากรูป เส้นตรง ℓ ตัดกับเส้นโค้ง $f(x)=-4x^2+16$ ที่จุด A และ B ซึ่งเป็นจุดบนแกน X และแกน Y ตามลำดับ จงหาพื้นที่ของบริเวณที่แรเงา



58 พรนภาจ้างรถบรรทุกเพื่อขนย้ายสัมภาระในการย้ายบ้าน โดยคนขับคิดค่าขนย้ายตามระยะทาง กิโลเมตรละ 15 บาท แต่ถ้าราคาที่ต้องจ่ายเกิน 450 บาท จะคิดค่าขนย้ายในราคาเหมาจ่าย 450 บาท ถ้าระหว่างเดินทางพรนภาบันทึกอัตราเร็วของรถบรรทุกได้ดังกราฟ พรนภาต้องจ่ายค่าขนย้ายเท่าใด



59 กำหนดให้ $f''(x)=0$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{R}$ ถ้า $f(-1)=0$ และ $f(1)=4$ จงหา $\int_1^2 f(x)\,dx$

60 กำหนดให้ $F(x)=ax^2+x+1$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และความชันของเส้นโค้ง $y=F(x)$ ที่จุดซึ่ง $x=1$ คือ 5 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ กับแกน X จาก -1 ถึง 1

⊛ 61. กำหนดให้กราฟของฟังก์ชัน f มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร และ $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{R}$ ถ้า $\frac{1}{4}\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=3$ จงหา $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

62 น้ำประปารั่วออกจากถังด้วยอัตรา $W'(t) = -\frac{t}{40}$ (มีหน่วยเป็นแกลลอนต่อนาที) โดยที่ $W(t)$ แทนปริมาตรของน้ำในถัง ณ เวลา t นาที

1) จงหาปริมาตรของน้ำที่ไหลออกจากถังตั้งแต่เวลา 0 ถึง 15 นาที
2) ถ้ามีปริมาตรของน้ำในถัง ณ เวลาเริ่มต้น 320 แกลลอน จงหาว่าจะต้องใช้เวลานานเท่าใดน้ำจึงจะไหลออกจากถังทั้งหมด

63 จากข้อมูลของสำนักงานสำมะโนประชากรของสหรัฐอเมริกา (U.S. Census Bureau) สามารถเขียนฟังก์ชันแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรโลกตั้งแต่ ค.ศ. 1950 (มีหน่วยเป็นล้านคนต่อปี) ได้เป็น $p(t) = -0.012t^2 + 48t - 47,925$ เมื่อ t แทน ค.ศ. ถ้าใน ค.ศ. 2017 มีจำนวนประชากรโลกประมาณ 7,500 ล้านคน จงหา

1) ฟังก์ชันแสดงจำนวนประชากรโลกใน ค.ศ. t
2) จำนวนประชากรโลกใน ค.ศ. 2050

64 นักชีววิทยากลุ่มหนึ่งได้ศึกษาการเพิ่มขึ้นของน้ำหนักของหนูทดลองเมื่อได้รับโปรตีนผสมสูตรพิเศษซึ่งประกอบด้วยยีสต์และแป้งข้าวโพด ผลการศึกษาพบว่าอัตราการเพิ่มขึ้นโดยประมาณของน้ำหนักของหนูทดลองกลุ่มนี้เทียบกับร้อยละของยีสต์ในโปรตีนผสมสูตรพิเศษ คือ $\frac{dG}{dP} = -\frac{P}{25} + 2$ เมื่อ G แทนน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นของหนูทดลอง (มีหน่วยเป็นกรัม) และ P แทนร้อยละของยีสต์ในโปรตีนผสมสูตรพิเศษ ถ้ามียีสต์อยู่ร้อยละ 10 ในโปรตีนผสมสูตรพิเศษแล้วหนูทดลองจะมีน้ำหนักเพิ่มขึ้น 38 กรัม จงหาว่าหนูทดลองจะมีน้ำหนักเพิ่มขึ้นกี่กรัม ถ้ามียีสต์อยู่ร้อยละ 75 ในโปรตีนผสมสูตรพิเศษ

บรรณานุกรม

กรมทรัพยากรทางทะเลและชายฝั่ง. *มารู้จักปะการังเทียม.* สืบค้นเมื่อ 1 สิงหาคม 2561, จาก https://km.dmcr.go.th/th/c_18

กระทรวงวัฒนธรรม. (2559, 19 มกราคม). *บุญบั้งไฟ...ประเพณีขอฝนชาวอีสานในเดือนหก.* สืบค้นเมื่อ 1 สิงหาคม 2561, จาก https://www.m-culture.go.th/young/ewt_news.php?nid=450&filename=index

กฤษฎา เสกตระกูล. (2551). *มูลค่าเงินตามเวลา (1).* สืบค้นเมื่อ 20 มีนาคม 2561, จาก https://www.set.or.th/set/education/knowledgedetail.do?contentId=556

ประมวลกฎหมายแพ่งและพาณิชย์ พ.ศ. 2535.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2556). *พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2554* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: บริษัท นานมีบุ๊คพับลิเคชั่นส์ จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 เรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น.* กรุงเทพฯ: บริษัท พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 เรื่องลำดับและอนุกรม.* กรุงเทพฯ: บริษัท พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 12). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 11). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมวิทยาศาสตร์ ฟิสิกส์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2562). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สำนักงานพัฒนาธุรกรรมอิเล็กทรอนิกส์ (องค์การมหาชน), สำนักมาตรฐาน. (2555, 2 พฤศจิกายน). *E-Banking คืออะไร?*. สืบค้นเมื่อ 20 มีนาคม 2561, จาก https://standard.etda.or.th/?p=219

สำนักงานพัฒนาธุรกรรมอิเล็กทรอนิกส์ (องค์การมหาชน), สำนักมาตรฐาน. (2561, 7 มีนาคม). *E-Banking คืออะไร?*. สืบค้นเมื่อ 20 มีนาคม 2561, จาก https://www.etda.or.th/content/1238.html

สุพาพร เทพยสุวรรณ. (2560, 1 มกราคม). *อันตรายมหันต์จากการดื้อยา*. สืบค้นเมื่อ 24 มกราคม 2562, จาก https://mgronline.com/qol/detail/9600000000098

Anton, H., Bivens, I. & Davis, S. (2013). *Calculus: Early Transcendentals* (10th ed). Singapore: John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd.

Burton, D. M. (2011). *The History of Mathematics* (7th ed). Singapore: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Haeussler, E. F., Jr., Paul, R. S. & Wood, R. J. (2005). *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences* (11th ed). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, Inc.

Hughes-Hallett, D. et al. (2017). *Calculus: Single Variable* (7th ed). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Lial, M. L., Hungerford, T. W., Holcomb, J. P., Jr. & Mullins, B. (2015). *Mathematics with Applications in the Management, Natural, and Social Sciences* (11th ed). China: Pearson Education Limited.

Larson, R. & Edwards, B. H. (2012). *Calculus I with Precalculus: A One-Year Course* (3rd ed). Boston, MA: Brooks/Cole - Cengage Learning.

ที่มาของภาพ

หน้า 2	Ingimage
หน้า 43	Christian Albrecht Jensen/Wikimedia Commons/Public Domain
หน้า 115	บริษัท มติชน จำกัด (มหาชน)
หน้า 158	© *Artificial Reef by Reefmaker1* by user:Reefmaker/Wikimedia Commons/ CC BY-SA 3.0
หน้า 220	(ซ้าย) Christoph Bernhard Francke/Wikimedia Commons/Public Domain
	(ขวา) Barrington Bramley/Wikimedia Commons/Public Domain

กราฟทั้งหมดในหนังสือเรียนเล่มนี้สร้างด้วยโปรแกรม GeoGebra

ภาคผนวก

ดัชนี

บทที่ 1 หน้า

บัญชีสัญลักษณ์

บทที่ 1

a_n	พจน์ที่ n ของลำดับ หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ
d	ผลต่างร่วม
r	อัตราส่วนร่วม
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	ลิมิตของลำดับ a_n
S_n	ผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม
$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$	ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$	อนุกรมจำกัด $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$	อนุกรมอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

บทที่ 2

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ลิมิตของ f ที่ a
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	ลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา
$f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x), y'$	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x
$f'(a), \frac{d}{dx}f(x)\Big\vert_{x=a}, \frac{dy}{dx}\Big\vert_{x=a}$	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x = a$
$f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2}f(x), y''$	อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f ที่ x
$f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3}{dx^3}f(x), y'''$	อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของฟังก์ชัน f ที่ x
$f^{(n)}(x), \frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^n}{dx^n}f(x), y^{(n)}$	อนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน f ที่ x เมื่อ $n \geq 4$

$\int f(x)dx$	ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x
$\int_a^b f(x)dx$	ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a, b]$

คณะผู้จัดทำ

ที่ปรึกษา

ศ. ดร.ชูกิจ ลิมปิจำนงค์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะผู้จัดทำหนังสือเรียน

นายประสาท สอ้านวงศ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฏ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสุเทพ กิตติพิทักษ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวอัมริสา จันทนะศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายพัฒนชัย รวิวรรณ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวภิญญดา กลับแก้ว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุธารส นิลรอด	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.จิณณวัตร เจตน์จรุงกิจ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายทศธรรม เมขลา	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ธนากร ปริญญาศาสตร์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ทิพาลัคน์ กฤตยาเกียรณ์	มหาวิทยาลัยมหิดล
ดร.ศุภณัฐ ชัยดี	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ดร.พงศ์พล เรือนคง	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
ดร.พงษ์เดช มนทกานติรัตน์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์	นักวิชาการอิสระ
รศ. ดร.วรายุ บุญปกครอง	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่

ผู้พิจารณาหนังสือเรียน

ผศ. ดร.ศราชัย ก้องศิริวงศ์	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่

คณะบรรณาธิการ

รศ. ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ. ดร.อมร วาสนาวิจิตร์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ. ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ผศ. ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ

ดร.เป็นหญิง โรจนกุล	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ดร.สารัตน์ ศิลปวงษา	มหาวิทยาลัยบูรพา
ดร.ปริญญา เสงี่ยมสุนทร	มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
นายดิน ประทุมวรรณ์	นักวิชาการอิสระ
นายเอกภัค เจริญเลิศมงคล	นักวิชาการอิสระ
นายชัยรัตน์ สุนทรประพี	นักวิชาการอิสระ
สาขาวิทยาศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลาย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ฝ่ายนวัตกรรมเพื่อการเรียนรู้	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ออกแบบปก

บริษัท พิงค์ บลู แบล็ค แอนด์ ออเร้จน์ จำกัด

ออกแบบรูปเล่ม

บริษัท เพอลังอิ พับลิชชิ่ง (ประเทศไทย) จำกัด

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ